

طراحی فیلتر دیجیتال

منظور از طراحی سیستم پردازش دیجیتالی بدست آوردن مدل سیستمی است که بتواند اهداف طرح را تامین کند. سیستمهای پردازش دیجیتالی در ۳ زمینه کلی کاربرد دارند.

- فیلتر: در این کاربرد منظور تعیین مدل سیستمی است که بتواند مشخصات خواسته شده فیلتر در طرح را تامین کند. فیلتر بدست آمده باید قابل ساخت بوده و اگر نوع *IIR* باشد پایداری آن باید تضمین شود. مشخصات فیلتر عموماً عبارتند از: Ω_s (لبه باند حذف)، Ω_p (لبه باند گذر)، R_p (ریپل باند گذر به db) و R_s مقدار تضعیف در باند حذف به db
 - هموارسازی *smoothing*: در این کاربرد مشخصات فیلتر مانند بند قبلی نیست، بلکه بصورت حداقل کردن واریانس نویز سیگنال مطرح می گردد. فیلترهای *Wiener* و *Kalman* از این دسته اند.
 - پیش بینی *Prediction*: سیستم در این کاربرد قادر است که بر اساس گذشته تخمینی از مقادیر آینده سیگنال را ارائه کند. سیستم پردازش دیجیتالی مانند هر سیستم دیجیتالی ممکن است *IIR* یا *FIR* باشد.
- IIR*: تابع تبدیل سیستم *IIR* عبارت است از:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M-1} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}$$

این تیپ سیستم در کاربردهایی که نیازی به داشتن فیلتر با فاز خطی نیست بسیار مناسب است چراکه در مقایسه با *FIR* دارای راندمان محاسباتی بالا است.

سیستم *FIR* که با تابع تبدیل $H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{-n}$ بیان می شود تابعی تمام صفر و فاز انوعی از آنها خطی است و در کاربردهایی که خطی بودن فاز مورد نیاز است مورد استفاده قرار می گیرد.

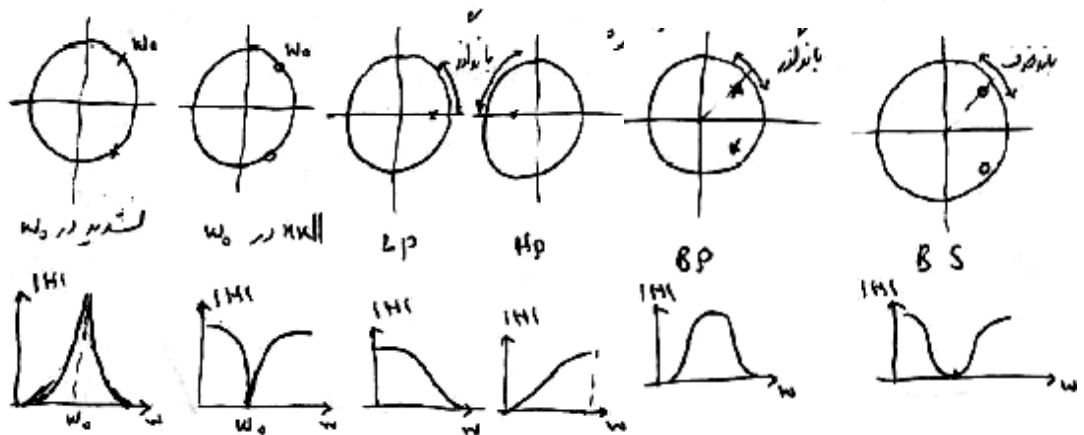
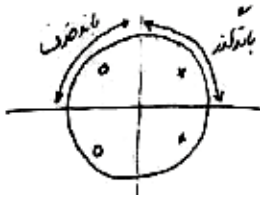
راهکارهای طراحی فیلتر:

- **فیلترهای ساده:** این فیلترها مانند فیلتر ناچ، سلکتیو و غیره فقط روی فرکانسهای مجزای خاص عموماً عمل می کنند
- **تبدیل *IIR* آنالوگ به دیجیتال:** راه حل این است که براساس مشخصات فیلتر دیجیتالی ابتدا آنالوگ طرح گردد و سپس فیلتر آنالوگ طرح شده به فیلتر دیجیتالی تبدیل شود.
- **فیلتر *FIR* پنجره ای دیجیتال:** طرح بر اساس اعمال پنجره بر فیلتر ایده ال صورت می گیرد تا فیلتر تقریبی تامین کننده اهداف بدست آید.
- **طراحی بهینه فیلتر دیجیتالی:** در این طرحها از الگوریتمهایی استفاده می گردد که تابع تبدیلی بهینه نسبت به تابع تبدیل مطلوب مشخص شده تولید می کند.

۱-۶ طراحی فیلترهای ساده دیجیتالی

اساس این روش بر این پایه استوار است که وجود قطب در نزدیکی محدوده ی از باند فرکانسی باعث می شود آن باند سیگنال را عبور دهد و وجود صفر موجب می شود آن قسمت بعنوان باند حذف عمل کند.

- هر چه موقعیت قطب به دایره واحد نزدیکتر باشد فیلتر در آن ناحیه ماکزیمم پیدا کرده و حالت تشدید پیش می آید. این مسئله با قرار گرفتن قطب روی دایره واحد به حداکثر خود می رسد. و بهره برای آن فرکانس بینهایت می شود. هرچه قطب از دایره فاصله بگیرد پهنای باند آن قسمت وسیعتر می گردد. برای پایداری قطبها باید داخل دایره واحد قرار گیرند.
- این موضوع برای صفر عکس عمل می کند به این معنی که اگر صفر روی دایره قرار گیرد آن فرکانس عبور نخواهد کرد و به همین ترتیب هر چه فاصله از دایره واحد زیاد شود پهنای باند حذف وسیعتر می گردد.



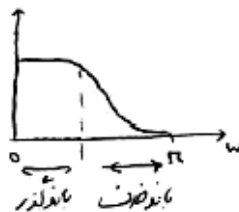
تابع تبدیل فیلتر

$$H(z) = G \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-1})}$$

است، G به گونه ای انتخاب می گردد که در منطقه باندگذر $|H(\omega)|=1$ گردد.

۱-۱-۶ فیلتر پایین گذر LP

قطب را در نزدیکی باندگذر (نزدیک $\omega=0$) و صفر را نزدیک باند حذف (نزدیک $\omega=\pi$) (در صورت نیاز) قرار دهید.



$$\text{مثال: سیستمی درجه ۲ با پهنای باند ۰.۴۲۴} \quad |H(\omega=0)|=1, \quad |H(\omega=\pi/4)|=1/4$$

در این جا سیستم درجه ۲ با قطبهای تکراری در نظر گرفته می شود.

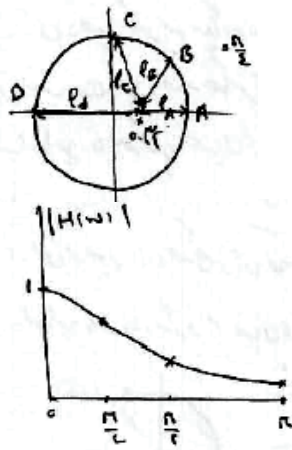
$$H(z) = \frac{G}{(1 - pz^{-1})^2}$$

$$H(\omega=0) = 1 \Rightarrow \frac{G}{(1-p)^2} = 1 \Rightarrow G = (1-p)^2$$

$$\Rightarrow |H(\omega=\pi/4)| = \frac{(1-p)^2}{(1 - p e^{j\pi/4})^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{(1-p)^4}{(1 - p e^{j\pi/4})^2 + \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = 0.424 \Rightarrow H(z) = \frac{0.424^4}{(z - 0.424)^2}$$

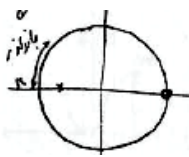
رسم پاسخ فرکانسی به روش گرافیکی



$$\begin{aligned}
 A \Rightarrow \omega = 0 &\Rightarrow |H| = 0.8 \times 0.8 \times \frac{1}{0.8} = 1 \\
 B \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow |H| = 0.8 \times 0.8 \times \frac{1}{0.8} = 0.72 \\
 C \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} &\Rightarrow |H| = 0.8 \times 0.8 \times \frac{1}{0.8} = 0.519 \\
 D \Rightarrow \omega = \pi &\Rightarrow |H| = 0.8 \times 0.8 \times \frac{1}{0.8} = 0.245
 \end{aligned}$$

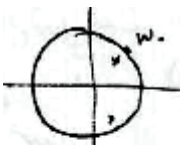
۲-۱-۶ فیلتر بالا گذر HP

قطبها نزدیک باند گذر (باند نزدیک π) و صفرها نزدیک باند حذف (باند نزدیک $\omega=0$) قرار می گیرند.

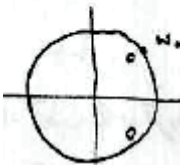


۳-۱-۶ فیلترهای میان گذر و میان نگذر

فیلتر BP با فرکانس مرکزی ω_0 : قطب کمپلکس نزدیک ω_0 قرار دهید هرچه ω_0 به دایره واحد نزدیکتر باشد پهنای باند گذر کمتر می گردد.



فیلتر BS با فرکانس مرکزی ω_0 : صفر کمپلکس نزدیک فرکانس ω_0 قرار دهید هرچه ω_0 به دایره نزدیک شود پهنای باند حذف کاهش می یابد.



مثال: فیلتر BP با فرکانس مرکزی $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ و $|H(\omega)| = \frac{\sqrt{r}}{r}$ و $\omega = \frac{\pi}{4}$ و $\omega = 0$ و $\omega = \pi$ طرح کنید.

$$\omega_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow p_{1,2} = re^{j\frac{\pi}{4}}$$

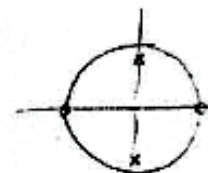
$$|H(\omega)|_{\omega=0} \Rightarrow z = 1$$

$$|H(\omega)|_{\omega=\pi} \Rightarrow z = -1$$

$$\begin{aligned}
 H(z) &= G \frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-re^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-re^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})} = G \frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{(1+re^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1+re^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})} \\
 |H(\omega=\frac{\pi}{4})| &= 1 \Rightarrow G \times \frac{r}{1-r^2} = 1 \Rightarrow G = \frac{1-r^2}{r}
 \end{aligned}$$

$$|H(\omega=\frac{\pi}{4})| = \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow 1.48(1-r^2)^2 = 1 - 1.88r^2 + r^4 \Rightarrow r^2 = 0.7$$

$$\Rightarrow H(z) = 0.15 \frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$



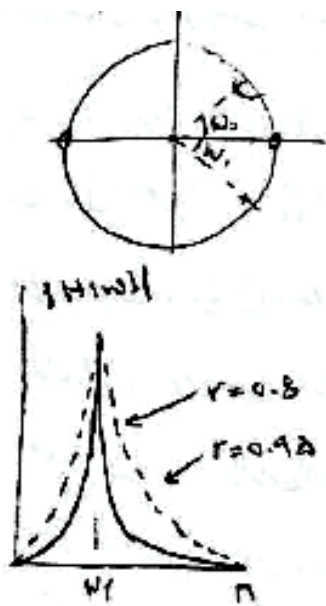
۴-۱-۶ سیستم تشدید دیجیتالی

سیستم تشدید دیجیتالی فیلتر میان گذری است که پهنای باند آن کوچک باشد. این سیستم را یک جفت قطب کمپلکس که داخل دایره و نزدیک محیط باشند می سازند. برای اینکه دامنه آن در صفر و π برابر صفر گردد، صفرهایی نیز به سیستم اضافه می شود

$$H(z) = G \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}$$

فرکانس تشدید ω برابر ω_0 نیست بلکه برابر $\omega_r = \cos^{-1} \left(\frac{1+r^2}{r} \cos \omega_0 \right)$ است

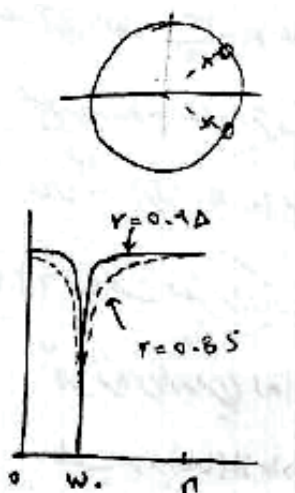
با نزدیک شدن قطبها به محیط دایره $r \rightarrow 1$ فرکانس تشدید ω_r به ω_0 نزدیک می گردد. در مدار تشدید شرط r نزدیک ۱ باید برقرار باشد. در وضعیتی که r نزدیک ۱ می گردد پهنای باند $3db$ سیستم از رابطه $\Delta\omega \approx 2(1-r)$ قابل محاسبه است. این موضوع در شکل پاسخ فرکانسی نیز نشان داده شده است که با افزایش r پهنای باند کاهش و تیز شدن فیلتر افزایش می یابد.



۵-۱-۶ فیلتر ناچ notch filter

فیلتر ناچ، فیلتری است که مولفه در فرکانس مورد نظر را به کلی حذف می کند به عبارت دیگر دامنه این فیلتر در فرکانس ω_0 صفر است. این کار با قرار گرفتن صفر روی دایره واحد در فرکانس ω_0 امکانپذیر است. از این فیلتر برای حذف تداخل شبکه قدرت در فرکانس ۵۰ هرتز یا هارمونیکهای آن استفاده می شود. شکل پاسخ فرکانسی این فیلتر را نشان می دهد برای اینکه فیلتر به اندازه کافی تیز باشد قطبهایی نیز مطابق شکل در طرح استفاده می کنند. هرچه قطبها به دایره واحد نزدیکتر گردند فیلتر ناچ تیزتر می شود. تابع تبدیل این فیلتر برابر است با:

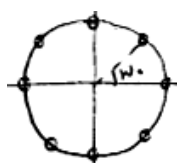
$$H(z) = G \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}$$



۶-۱-۶ فیلتر شانه ای comb یا فیلتر MA (Moving Average)

فیلتر شانه ای فیلتری است که فرکانس ناچ آن در محور فرکانس بصورت پیرویدیک تکرار می گردد از این فیلتر برای حذف تداخل و هارمونیکهای آن استفاده می شود. به این معنی که اگر فرکانس اصلی تداخل ω_0 باشد هارمونیکهای آن $2\omega_0$ و $3\omega_0$ و غیره را نیز حذف می کند. مزیت آن در پاسخ ضربه ساده آن (پنجره مستطیلی) است که پیرویدیک بودن فرکانسهای ناچ آن را ممکن می سازد.

برای رسیدن به فرکانسهای پیرویدیک، باید روی دایره واحد به تعداد نقاط ناچ، صفر (کمپلکس) قرار داد. این صفرها در



معادله $e^{-j\omega_0 k} = e^{-j\frac{2\pi}{M} k} = 1$ صدق می کنند که $M = \frac{2\pi}{\omega_0}$ عددی صحیح است.

از طرفی این صفرها جواب معادله $1 - z^{-M} = 0$ نیز می باشند.

$$1 - z^{-M} = 0 \Rightarrow z^M = 1 = e^{j2\pi k} = e^{j\frac{2\pi}{M} k} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{M} k \quad k=0, 1, \dots, M-1$$

رای اینکه مولفه DC حذف نگردد قطبی در $Z=1$ قرار می گیرد تا تابع تبدیل مقابل بدست آید

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} \Rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \delta(n-k)$$

همچنانکه پاسخ ضربه سیستم نشان می دهد فیلتر شانه ای در میدان زمان فقط پنجره ای مستطیلی به طول M است. برای اینکه دامنه مولفه dc تابع طول فیلتر نشود آنرا بصورت نهائی ذیل می نویسند.

$$H_c(z) = \frac{1}{M} \cdot \frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} \Rightarrow h_c(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta(n-k) \Rightarrow y(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)$$

اگر از رابطه $M = \frac{2\pi}{\omega_0}$ عدد M صحیح بدست نیاید می توان از رابطه $M = \frac{2\pi f}{\omega_0}$ استفاده کرد تا M صحیح به ازای کوچکترین f

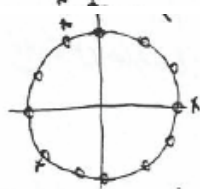
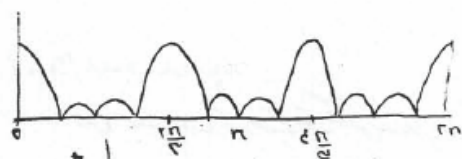
صحیح بدست آید. به این ترتیب مولفه های $\frac{\omega_0}{e}$ و هارمونیکهایش، ω_0 و هارمونیکهایش را نیز در بر می گیرند. اگر متنی برای حذف فرکانس های دیگر به غیر از ω_0 و هارمونیکهایش وجود داشته باشد طبیعی است که دیگر از این فیلتر نمی توان استفاده کرد.

۷-۱-۶ ساخت فیلتر پریودیک: افزایش نمونه گیری $h(n)$

اگر فرکانس نمونه گیری $h(n)$ فیلتری، L برابر افزایش یافته و نقاط جدید با صفر پر شوند. تابع تبدیل جدید $H_L(z) = H(z^L)$ طیف جدید $H_L(\omega) = H(L\omega)$ می گردد که بیان کننده L بار تکرار طیف $H(\omega)$ بصورت پریودیک در محدوده 0 تا 2π است.

برای مثال فیلتر شانه ای $h(n) = \{1, 1, 1, 1\} * 1/4$ را در نظر بگیرید که فرکانس نمونه گیری آن $L=3$ برابر افزایش یافته و در نتیجه $h_L(n) = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0\} * 1/4$ بدست آمده است. برای فیلتر جدید می توان نوشت:

$$h_L(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta(n-kL) \Rightarrow H_L(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} (e^{j\omega})^{kL} = \frac{1}{M} \frac{1-z^{-LM}}{1-z^{-L}} = H(z^L) = \frac{1-z^{-LM}}{1-z^{-L}}$$



شکل طیف و موقعیت $LM=12$ صفر و $L=3$ قطب این سیستم را نشان می دهد. همچنانکه دیده می شود طیف دارای $L=3$ قله و متعاقبا $P = \text{integer}(L/2) + 1$ فرکانس عبور $(2\pi/3, 0)$ و تعداد $S = \text{integer}(LM/2) + 1 - p = 5$ فرکانس حذف $(\pi, 5\pi/6, \pi/2, \pi/3, \pi/6)$ می باشد.

از کاربردهای این فیلتر برای مثال جداکردن ω_p و مولفه هایش از فرکانس مزاحم ω_s و مولفه هایش می باشد.

برای طراحی فیلتر ابتدا L از رابطه $L = \frac{2\pi k_1}{\omega_p}$ محاسبه می شود (اگر فرکانس نمونه گیری معین نشده

باشد از رابطه $L = \frac{2\pi}{\Omega_p T_s}$ نیز می توان استفاده کرد). ابتدا L باید از رابطه $P = \text{integer}(L/2) + 1$ که تعداد مولفه ها. عبور از جمله

$$H(z) = \frac{1}{M} \frac{1-z^{-LM}}{1-z^{-L}}$$

فرکانس DC می باشد نیز صدق کند. سپس M از رابطه $LM = \frac{2\pi k_2}{|\omega_s - \omega_p|}$ محاسبه می گردد. در نهایت و

$$h_L(n) = \frac{1}{M} \left\{ \underbrace{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}_{\text{میز}} \right\}$$

مشخص می گردند.

مثال: مولفه های طیف خورشید و ماه به یکدیگر نزدیک و مقادیر $f_{\text{sun}} = 1 \text{ cycle/day}$ و $f_{\text{moon}} = 0.96618 \text{ cycle/day}$ را دارند. فرکانس نمونه گیری را تعیین و فیلتری بسازید که ۸ مولفه از طیف خورشید را جدا کند.

$$\hookrightarrow W_{sm} = 2\pi f_{sm} T_s = 2\pi T_s, \quad \omega_m = \Omega_m T_s = 2\pi \times 0.94418 T_s$$

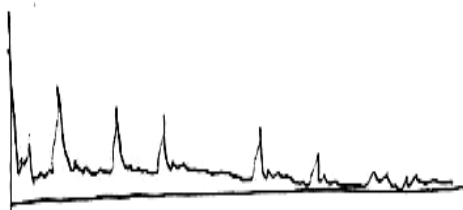
$$\hookrightarrow p = 1 + 1 = 2 = \text{integer}\left(\frac{1}{r}\right) + 1 \Rightarrow L > 12 \Rightarrow L = 14$$

$$\left\{ \frac{2\pi k_1}{W_{sm}} = L \Rightarrow 14 = \frac{2\pi k_1}{2\pi \times 1 \times T_s} \Rightarrow k_1 = 1, \quad T_s = \frac{1}{14} \Rightarrow f_s = 14 \text{ cycle/sec} \right.$$

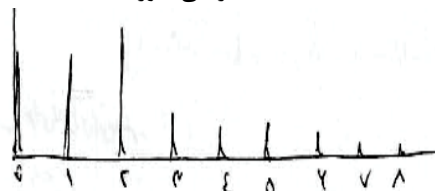
$$\hookrightarrow M_{sm} = \frac{2\pi k_s}{1\omega_p - \omega_s} = \frac{2\pi k_s}{2\pi T_s(1 - 0.94418)} = LM = 14M \Rightarrow M = 0.9$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{0.9} \times \frac{1 - z^{-14}}{1 - z^{-14}}$$

طیف خورشید و ماه



طیف استخراجی خورشید



۸-۱-۶ نوسان ساز دیجیتالی

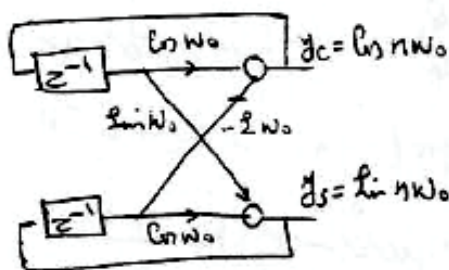
وقتی سیستمی دارای یک جفت قطب کمپلکس روی دایره واحد باشد $p_{1,2} = \exp(j\omega_0)$ با اعمال ضربه ای به آن به نوسان در می آید. تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل و پاسخ ضربه اینچنین سیستمی از اینقرار است.

$$H(z) = \frac{A z^n \omega_0}{1 - r \exp(j\omega_0) z^{-1} - r^* \exp(-j\omega_0) z^{-2}}$$

$$y(n) = r \exp(j\omega_0) y(n-1) - r^* \exp(-j\omega_0) y(n-2) + A z^n \omega_0 \delta(n)$$

$$h(n) = A \exp(j(n+1)\omega_0) u(n)$$

در این روابط فرکانس نوسانات است.



شکل مقابل نوسان ساز دیگری را نشان می دهد که در خروجی هم سینوس و هم کسینوس (در خروجی با ۹۰ اختلاف فاز) را تولید می کنند. این سیستم با شرایط اولیه $y_s(-1) = A \sin \omega_0$ و $y_c(-1) = A \cos \omega_0$ به نوسان پرداخته و ادامه می دهد.

۹-۱-۶ فیلترهای Mean و Median

فیلتر Mean: در این فیلترها پنجره متحرکی روی سیگنال قرار می گیرد و متوسط مقادیر داخل پنجره بعنوان خروجی انتخاب می گردد. از این روش برای هموار کردن سیگنال استفاده می شود.

$$x(n) = \{1, 0.7, 1, 0.7, 0.5, -0.5, -1, -1.5, -1.5, -1, -0.5, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 1.5, 1, 0.7, 0.7, 1, 1\}$$

$$w(n) = \frac{1}{4} \{1, 1, 1, 1\} \Rightarrow y(n) = \{0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4, 4.25, 4.5, 4.75, 5, 5.25, 5.5, 5.75, 6\}$$

فیلتر Median: این فیلتر مشابه فیلتر mean است با این تفاوت که بجای میانگین مقادیر داخل پنجره median آنها استخراج و بعنوان خروجی منظور می گردد. اگر دنباله ای از اعداد داشته باشیم که بصورت صعودی مرتب شده باشند عدد میانی مقدار median است. در این فیلتر طول، عددی فرد در نظر گرفته می شود.

$$\text{median}\{2, -1, 0, 2, -1\} = \text{median}\{-1, 2, 0, 2, -1\} = 2$$

بر این اساس خروجی فیلتر *median* با طول ۳ ناشی از ورودی $x(n)$ از این قرار می‌گردد.

$$y(n) = \{0, 1, 0, 2, 2, 2, 2, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1\}$$

دستور *MATLAB* برای اجرای این عمل اینگونه است

$$y = \text{medfilt}(x, n)$$

که در آن x سیگنال ورودی، n اندازه پنجره و y خروجی است.

۲-۶ تبدیل فیلتر آنالوگ به دیجیتال

۱-۲-۶ تبدیل سیستم آنالوگ به دیجیتال

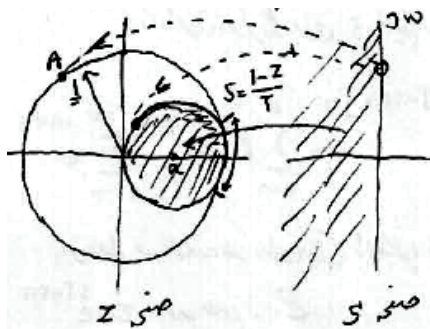
به دلایل ذیل تبدیل سیستم آنالوگ به دیجیتال اهمیت پیدا می کند.

- ۱- اغلب سیستمهای واقعی فیزیکی آنالوگ هستند. برای شبیه سازی آنها می توان از روشهای عددی استفاده کرد که در آن، خروجی ناشی از اثر ورودی بدست می آید، در این روش سیستم بصورت دیجیتالی، مستقل از ورودی، در اختیار نیست. با تبدیل سیستم آنالوگ به دیجیتال، مشابه دیجیتالی سیستم آنالوگ بدون توجه به نوع ورودی در اختیار قرار می گیرد.
- ۲- تئوریها و دستوالعملهای مفصل و دقیقی در خصوص طراحی فیلترهای IIR آنالوگ و کنترلرهای آنالوگ وجود دارد. که پاسخهای عموماً با شکل بسته (نه گسسته) ارائه می کنند. استفاده از این دستورالعملهای ریاضی گسترده، بحث تبدیل سیستم آنالوگ به دیجیتال را ضرورت می بخشد تا طراحی آنالوگ صورت گرفته و سپس دیجیتالی شود.
- به دنبال روشهای متعدد تبدیل سیستم آنالوگ به دیجیتال و ملاحظات آنها عرضه می شود.

۲-۲-۶ تقریب مشتق

در این تبدیل عمل مشتق گیری تقریب زده می شود.

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} \Rightarrow S = \frac{1-z^{-1}}{T}$$



به این ترتیب مدل دیجیتالی سیستم آنالوگ $H_a(s)$ برابر می شود با

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

که T پریود نمونه برداری است.

مشخصات روش

۱- ساده است

۲- محور $j\omega$ را به دایره ای در صفحه z به شعاع 0.5 و مرکز $(0.5, 0)$ منتقل می کند.

بنابراین این حسن را دارد که سیستم پایدار آنالوگ را به سیستم پایدار دیجیتال بدل کند.

۳- همانگونه که در شکل دیده می شود فقط بخش کمی از دایره به مرکز α با دایره واحد مشترک است. این بخش مشترک در نزدیکی فرکانس دیجیتالی $\omega=0$ است لذا فقط فیلترهای LP در نتیجه این تبدیل می توانند رفتار خود را حفظ کند این مسئله برای مثال گذرهای که فرکانس مرکزی پائین دارند نیز صحیح است. همانطور که شکل نشان می دهد فیلتر بالاگذر با این تبدیل نمی تواند رفتار خود را حفظ کند چرا که مثلاً فرکانس $3\omega_s/8$ (فرکانس نمونه برداری) به جای نقطه A روی دایره واحد

$$\left(\frac{5}{8} \omega_s T_s = \frac{2}{\epsilon} n \right)$$

به نقطه

$$z = \left. \frac{1}{1-sTs} \right|_{s=j\omega} = \frac{1}{1-j\omega Ts} = \frac{1}{1-j \frac{5}{8} \omega_s Ts} = \frac{1}{1-j \frac{5}{4} \pi} = 0.394 \angle 97^\circ$$

منتقل می گردد. لذا نمی تواند این تبدیل رفتار سیستم را حفظ کند.

این تبدیل از نوع تفضلی رو به عقب بود. مشابه آن که تفضلی رو به جلو است که به هیچوجه مناسب نیست زیرا ممکن است سیستم پایدار را به سیستم ناپایدار در صفحه z تبدیل کند.

$$s = \frac{z-1}{T}$$

$$H(s) = \frac{1}{Ts+1} \Rightarrow H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{1-z}{T}} = \frac{1}{\frac{1-z}{T} + 1} = \frac{T}{1-z^{-1}}$$

۳-۲-۶ روش تثبیت پاسخ ضربه Impulse Invariant

در این روش تبدیل بر این اساس صورت می گیرد که هر دو سیستم پاسخ ضربه مشابه داشته باشند. یعنی پاسخ ضربه سیستم گسسته، گسسته پاسخ ضربه سیستم پیوسته باشد.

$$h(n) = T \text{sha}(nTs)$$

در مبحث نمونه برداری دیدیم که طیف سیگنال نمونه برداری شده $ha(nT)$ برابر است با

$$H(\omega T) = \frac{T_s}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(\omega - \frac{2\pi k}{T_s})$$

حال اگر پریود Ts به اندازه کافی کوچک انتخاب شود که تداخل درهم شدن فرکانسی ناشی از پهنای باند $Ha(\omega)$ اتفاق نیفتد و رابطه فوق الذکر را برای s تعمیم داده و معادل تبدیل z قرار دهیم بدست می آید.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} h_a(nT) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-sTn - j(\omega T - 2\pi k)n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-snT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi knT}$$

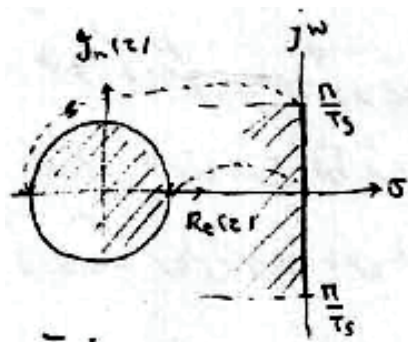
این رابطه نشان می دهد که در این روش رابطه بین s و z یک به یک نیست زیرا برای مثال به ازای $k=0$ و $k=1$ مقادیر مساوی

$$z = e^{sT} = e^{sT+2\pi j}$$

نتیجه می دهد. و به همین ترتیب

$$z = e^{sT+2k\pi j} \quad k = -\infty, \dots, \infty$$

بنابراین در این روش



۱- نواری به عرض $2\pi/Ts$ از سمت چپ محور $j\omega$ به داخل دایره واحد منتقل می شود، لذا سیستم پایدار آنالوگ با این تبدیل سیستم پایدار دیجیتالی می دهد.

۲- این نوار با عرض $2\pi/Ts$ از $-\infty$ تا ∞ تکرار شده و جملگی به داخل دایره واحد منتقل می شوند لذا برای جلوگیری از درهم شدن فرکانسی به هنگام نمونه برداری، باید پهنای باند محدود شود و از همین رو این روش تبدیل برای فیلتر بالا گذر آنالوگ مناسب نیست از مزیت مهم این تبدیل وجود ارتباط خطی بین فرکانس دیجیتالی و آنالوگ است $\omega = Ts\Omega$

روش تبدیل

۱- ابتدا $Ha(s)$ را به کسرهای جزئی بسط دهیم بدست می دهیم.

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{s - p_k}$$

۲- معادل z جملات درجه ۱ از این قرار است

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T C_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

$$H(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2 + 9} = \frac{\frac{1}{T}}{s+0.1-j3} + \frac{\frac{1}{T}}{s+0.1+j3} \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{T} \cdot T}{1 - e^{-0.1T} j^3 T z^{-1}} + \frac{\frac{1}{T} \cdot T}{1 - e^{-0.1T} - j^3 T z^{-1}} = \frac{T(1 - e^{-0.1T} \cos^3 T z^{-1})}{1 - 2e^{-0.1T} \cos^3 T z^{-1} + e^{-0.2T} z^{-2}}$$

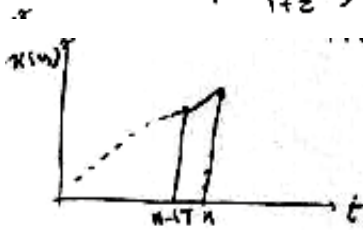
۴-۲-۶ Bilinear روش دوخطی

روشی که بصورت عمومی مورد استفاده قرار می گیرد روش دوخطی است که از تبدیل

$$s = \frac{T}{\tau} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

استفاده می کند. به این ترتیب

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{T}{\tau} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}$$



تبدیل می شود. این روش برگرفته از حل عددی انتگرال است که در هر گام می نویسیم

$$y(n) = \int x(n) + y(n-1) = \frac{T}{\tau} (x(n) + x(n-1)) \rightarrow y(n-1)$$

که می توان نوشت

$$y(n) - y(n-1) = \frac{T}{\tau} (x(n) + x(n-1))$$

تبدیل Z این رابطه برابر است با

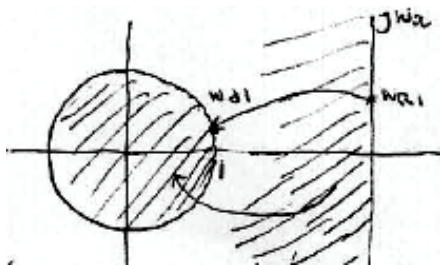
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{\tau} \frac{z+1}{z-1}$$

اما تابع تبدیل انتگرال در سیستم پیوسته برابر است با

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \\ y(0^-) = 0 \end{cases}$$

از تطبیق این دو رابطه داریم

$$s = \frac{T}{\tau} \frac{z-1}{z+1}$$



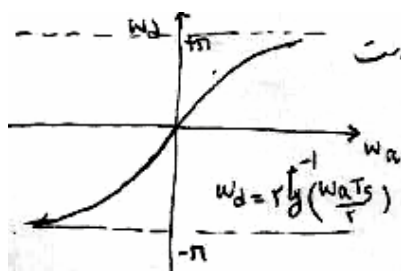
خواص تبدیل دو خطی

- محور $j\omega$ را یک به یک به دایره شعاع ۱ ارتباط می دهد.
- سمت چپ محور $j\omega$ به داخل دایره مرتبط می شود.
- فرکانس در میدان $s(\omega)$ که از $-\infty$ تا ∞ ادامه دارد به فرکانس در میدان $z(\omega)$ ارتباط پیدا می کند که محدوده تغییرات آن $-\pi$ تا π است.

ارتباط بین این دو، خطی نیست و مسئله جمع شدن فرکانسمی frequency warping را ایجاد می کند.

بیان دیگر این موضوع آن است که فرکانس آنالوگ 1 در نتیجه تبدیل دو خطی به فرکانس ω نه با یک ارتباط خطی، بلکه تنازاتی مرتبط می شوند. یعنی بجای رابطه خطی $\omega = \Omega T_s$

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2}$$



برقرار است که موجب جمع شدن فرکانسی می شود.

مثال: فیلتر پایین گذری دارای $\Omega_p = 1 \text{krad/s}$ است. این فیلتر به فیلتری دیجیتالی به روش دو خطی تبدیل می شود، مقدار ω_p چقدر است. $T_s = 200 \mu\text{s}$ است. اگر فرکانس دیجیتالی به روش خطی به آنالوگ باز گردد چه فرکانسی را نتیجه می دهد.

جواب:

$$\omega = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T_s}{2} = 0.1993 \text{Rad}$$

وقتی این فرکانس دیجیتالی با رابطه خطی به آنالوگ تبدیل شود نتیجه می دهد

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s} = \frac{0.1993}{200 \mu} = 0.996 \text{krad/s}$$

که با 1kRad/s اصلی تفاوت دارد.

این کاهش فرکانسی از تبدیل سیستم آنالوگ به دیجیتال را باید در نظر گرفته و در طرح فیلتر آنالوگ آنرا جبران کرد. به دلیل اینکه این تبدیل فاز سیستم را غیر خطی انتقال می دهد در طراحی فیلتر دیجیتال با فاز خطی استفاده نمی شود

$$H(s) = \frac{k}{s+1} \Rightarrow H(z) = \frac{k}{\frac{1}{T} \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{kT(z+1)}{z^2 - z + Tz + T} = \frac{kT(1+z^{-1})}{z^2 - z + Tz + T}$$

$$= \frac{kT}{T+Tz} (1+z^{-1}) = \frac{kT}{1 + \frac{T-z}{T+z} z^{-1}}$$

۵-۲-۶ مقایسه روشهای تبدیل سیستم آنالوگ به دیجیتال

تفاضلی رو به عقب: این روش مطابق فرمول ذیل سیستم آنالوگ را به دیجیتالی تبدیل می کند.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

تثبیت پاسخ ضربه: در این روش اساس بر این قرار می دهد که پاسخ ضربه سیستم آنالوگ و دیجیتال مشابه باشد بر این اساس تبدیل اینگونه صورت می گیرد

$$H(s) = \sum \frac{C_k}{s-p_k} \Rightarrow H(z) = \sum \frac{T C_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

این تبدیل بوسیله MATLAB اینگونه انجام می شود.

$$[q_d, p_d] = \text{impinvar}(q_a, p_a, 1/T_s)$$

تثبیت پاسخ پله: به این روش ZOH نیز گفته می شود. در این روش پاسخ پله واحد سیستم آنالوگ تعیین می گردد. $y(t)$. سپس از آن نمونه برداری شده $y(nT)$ و سپس تبدیل Z آن محاسبه می گردد $Y(z)$. سپس $Y(z)$ به تبدیل Z ورودی پله تقسیم شده تا $H(z) = (1-z^{-1})Y(z)$ بدست آید. پاسخ پله سیستم نیز وقتی مد سیستم تکراری نباشد مطابق ذیل نوشته می شود

$$y(s) = \sum \frac{A_k}{s-p_k} \Rightarrow Y(z) = \sum \frac{T A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \Rightarrow H(z) = (1-z^{-1}) \sum \frac{T A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

این تبدیل را MATLAB اینگونه انجام می دهد

$$m = \text{tf}(q_a, p_a); [q_d, p_d] = \text{tf2dta}(\text{zoh}(m, T_s, 1/T_s), 1/T_s)$$

تثبیت پاسخ شیبی: به این روش FOH نیز گفته می شود که در آن پاسخ سیستم آنالوگ به ورودی شیبی با پاسخ سیستم دیجیتالی مشابه قرار داده می شوند روش کار مشابه تثبیت پاسخ پله است با این تفاوت که $Y(z)$ به تبدیل Z ورودی شیبی تقسیم می گردد.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{Tz \frac{1}{(1-z^{-1})^2}} \Rightarrow H(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{Tz^{-1}} \cdot Y(z)$$

این تبدیل را MATLAB اینگونه انجام می دهد.

$$m = tf(qa, pa); [qa, pa] = tf2zpk(c2d(m, ts, 'F0H'), 'v')$$

تطبیق صفرها و قطبها: در این روش صفرها za و قطبها pa مربوط به سیستم آنالوگ از طریق تبدیل $exp(sT)$ صفرها و قطبهای $H(z)$ را می سازند.

$$z_d = e^{zaT}, p_d = e^{paT}$$

این تبدیل را MATLAB اینگونه انجام می دهد.

$$m = tf(qa, pa); [qd, pd] = tf2zpk(c2d(m, ts, 'matched'), 'v')$$

تبدیل دو خطی: در این تبدیل ارتباط بین سیستم آنالوگ و دیجیتال اینگونه برقرار می گردد.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

این تبدیل را MATLAB اینگونه انجام می دهد.

$$1) [z, d] = bilinear(q, p, 1/T)$$

$$2) m = tf(qa, pa); [qd, pd] = tf2zpk(c2d(m, ts, 'bilinear'), 'v')$$

برای مقایسه، روشها روی سیستم $H(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$ پیاده می شوند. فرض کنید قرار باشد بعد از تبدیل، از فرکانس صفر تا فرکانس

دلخواه ω_d حداکثر انحراف دامنه $1db$ و حداکثر انحراف فاز 5 درجه باشند. هدف یافتن فرکانس نمونه برداری است که حدودا موضوع را تحقق می بخشد.

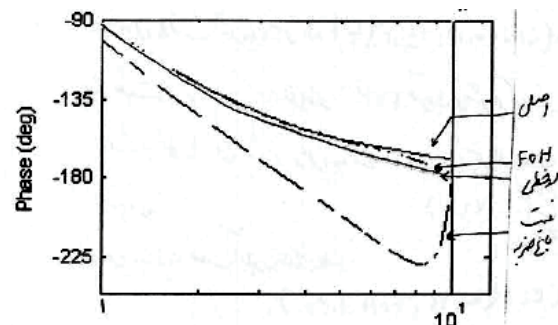
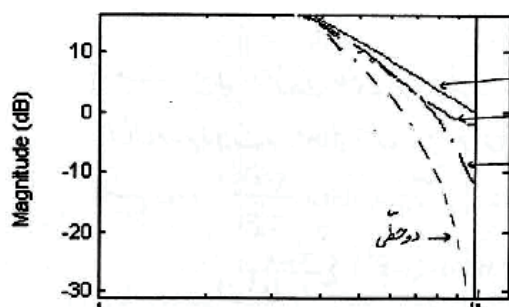
جواب: شکلها مقایسه دامنه و فاز تبدیلات با سیستم اصلی را نشان می دهند.

نتیجه شبیه سازی ها در جدول ذیل آمده است. این مقادیر برای این مثال دقیق و برای موارد مشابه تقریبی خواهد بود.

	فاز	روشنی	نسبت فاز	نسبت
نسبت فاز	$\approx 26.5^\circ$	$\approx 5.5^\circ$	$\approx 1.5^\circ$	$\approx 4.5^\circ$
نسبت روشن	$\approx 24.5^\circ$	$\approx 1.5^\circ$	$\approx 4.5^\circ$	$\approx 2.5^\circ$

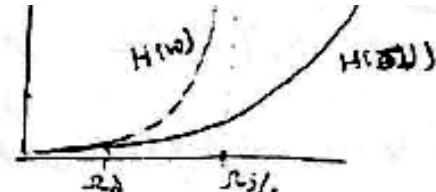
نتایج:

۱- اگر محدودیتی در انتخاب فرکانس نمونه گیری ω_s وجود نداشته باشد می توان با افزایش آن از هر یک از این روشها نتیجه

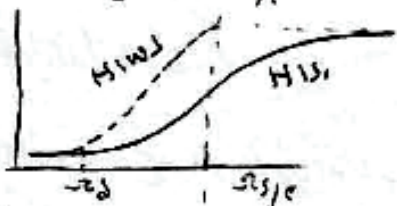


دلخواه را بدست آورد. به این ترتیب که اگر مثلاً $\Omega d = 1 \text{ kHz}$ باشد روش دو خطی با $\Omega s = 7 \text{ kHz}$ و مثلاً ZOH با 35 kHz برابر (بیشتر) نتیجه مطلوب را می دهند. باعث می شوند.

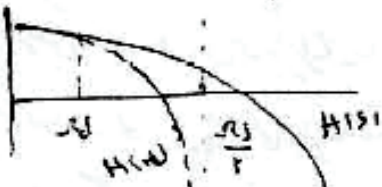
۲- کمترین فرکانس نمونه گیری در شرایط مشابه را FOH و دو خطی دارند از انجائیکه روش دو خطی محاسبات دستی ساده ای دارد ترجیح داده می شود اگر چه وقتی از کامپیوتر برای محاسبات استفاده می شود این مزیت رجحان خود را از دست می دهد.



۳- روش دو خطی با رفع جمع کنندگی به هیچ وجه برای رسیدن به انطباق پاسخ فرکانس آنالوگ و دیجیتال در محدوده ای خاص $\Omega < \Omega d$ مناسب نیست. ولی اگر هدف انطباق دامنه پاسخ فرکانس در فرکانس خاص (Ωd) باشد مناسب است از همین رو در تبدیل فیلتر آنالوگ به دیجیتال استفاده می گردد.



۴- نتایج بدست آمده مربوط به یک مثال خاص بود و از آن نمیتوان استنتاج دقیق کلی نمود ولی از آن بعنوان راهنمای مقایسه بین روشها ی مختلف می توان سود برد.



۵- بحث های فوق تطبیق پاسخ فرکانسی در محدوده $\Omega < \Omega d$ را نشان داد ولی مقدار عدم تطبیق در خارج محدوده $\Omega > \Omega d$ مورد توجه قرار نگرفت. این موضوع را در سه حالت برای تبدیل دو خطی در شکل نشان می دهیم. در شکل a درجه صورت از مخرج بیشتر است. در شکل b درجه صورت و مخرج برابرند. در شکل c درجه صورت از مخرج کمتر است. در هر سه حالت فقط نمودار دامنه بررسی می شوند.

در شکل a که کاربرد عملی نیز دارد

$$H(s) = \infty \Rightarrow H(\omega) = \infty$$

$$s \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \Omega$$

در شکل b که فیلتر بالا گذر است.

$$H(s) = M \Rightarrow H(\omega) = M$$

$$s \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \Omega$$

در شکل c که فیلتر پایین گذر است

$$H(s) = -\infty \Rightarrow H(\omega) = -\infty$$

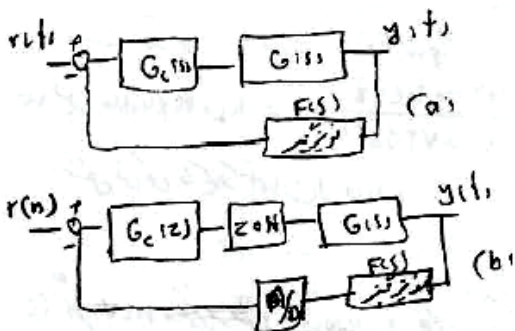
$$s \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \Omega$$

۶- در رابطه با موارد بند ۵ در خصوص تبدیل فیلتر آنالوگ به دیجیتال، ملاحظات در مبحث تبدیل فیلتر آنالوگ به دیجیتال بحث می گردد. در بند بعد مسائل مبتلا به تبدیل کنترلر آنالوگ به دیجیتال بحث می گردد.

۶-۲-۶ تبدیل کنترلر آنالوگ به دیجیتال

سیستم آنالوگ در شکل a و معادل دیجیتالی آن در شکل b نشان داده شده اند. این دو سیستم با توجه به موارد ذیل معادل و یا با یکدیگر اختلاف خواهند داشت.

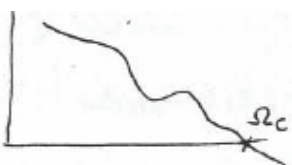
۱- بدلیل سادگی از روش دو خطی برای تبدیل کنترلر آنالوگ به دیجیتال استفاده می گردد.



$$G_c(z) = G_c(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

از روشهای دیگر نیز می توان استفاده کرد.

• حال اگر مطابق شکل مقابل فرکانس قطع بهره حلقه Ωc باشد، طبق بحث قبلی برای روش



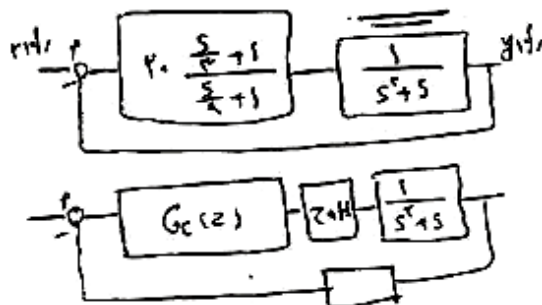
دو خطی در جهت تبدیل کنترل آنالوگ به دیجیتال، $\Omega s = 7\Omega c$ باید انتخاب گردد.

- اگر درجه صورت کنترلر از مخرج آن بیشتر باشد، که اغلب نیز اینگونه است، باید قطب غیر موثر به کنترلر آنالوگ اضافه شده تا درجه مخرج از صورت بیشتر گردد.

$$G_c(s) = \frac{2s^2 + 3s + 4}{s} \quad (PID) \Rightarrow G_c(z) = \frac{2s^2 + 3s + 4}{s} \times \frac{1}{\left(\frac{s}{z} + 1\right)\left(\frac{s}{z} + 1\right)}$$

۲- اگر $\Omega s > 30\Omega c$ انتخاب گردد، کاهش حاشی فاز ناشی از ZOH موجود در حلقه به $180/30 = 6$ درجه محدود گشته و هر دو سیستم به نحو قابل قبولی معادل رفتار می کنند. ولی اگر $7\Omega c < \Omega s < n\Omega c$ باشد، باید انتظار $180/n$ درجه کاهش حاشیه فاز و به تبع آن افزایش PO را داشت.

۳- فرض کنید فرکانس نمونه برداری $\Omega s = n\Omega c$ انتخاب شده باشد، اگر حاشیه فاز مطلوب ϕ_{pm} باشد، در طراحی کنترلر آنالوگ



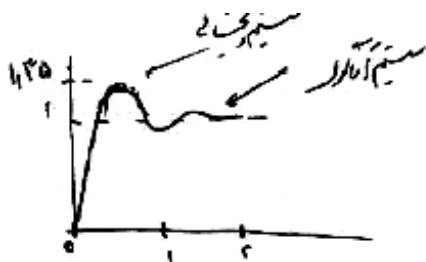
جای استفاده از ϕ_{pm} باید حاشیه فاز $\phi_{pm} = \phi_{pm} + 180/n$

لحاظ گردد و طراحی انجام شود. در این صورت علیرغم کاهش حاشیه فاز در نتیجه سیستم کنترل گسسته، حاشیه فاز مطلوب در دسترس خواهد بود.

مثال: سیستم کنترلر آنالوگ شکل را در نظر گرفته به ازای $\Omega s = 30\Omega c$

مدل معادل دیجیتالی آنرا بدست آورده مقایسه کنید.

جواب: فرکانس قطع و حاشیه فاز س/ستم کنترل شده آنالوگ برابر است با:



$$\text{bode}(20 + [1/z, 1], \text{conv}([1/z, 1], [1, 10]))$$

$$\phi_{pm} = 60^\circ, \Omega c = 7$$

پس $\Omega s = 30\Omega c = 180$ انتخاب می گردد که به معنی $Ts = 2\pi/180 = 3.3$

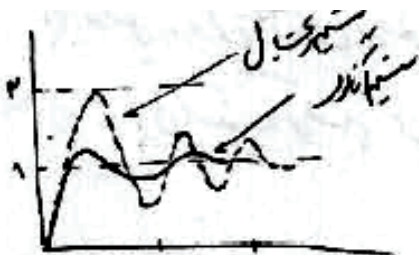
میلی ثانیه است. بر این اساس معادل دوخطی کنترلر بدست می آید.

$$G_c(z) = \frac{2.7448 - 2.144z^{-1}}{1 - 0.744z^{-1}}$$

شکل رفتار سیستم آنالوگ و دیجیتال معادل را نشان می دهد.

اگر $n=7$ در نظر گرفته می شد، $\Omega s = 6 \times 7 = 42$ و $Ts = 2\pi/42 = 0.14$ ثانیه

می گردید. در این حال حاشیه فاز حدود ۲۵ درجه کاهش یافته و به ۱۵ درجه می رسد که به معنی افزایش قابل ملاحظه PO است. شکل اتین موضوع را نشان می دهد.



۳-۶ تبدیل فیلتر IIR آنالوگ به دیجیتال

- ۱- تعریف مشخصات فیلتر دیجیتال $\omega_p, \omega_s, R_p, R_s$ اگر مشخصات فیلتر آنالوگ $\Omega_p, \Omega_s, R_p, R_s$ داده شده باشد پیرو نمونه برداری نیز باید داده شود تا بتوان $\omega_p = \Omega_p T_s$ و $\omega_s = \Omega_s T_s$ را محاسبه کرد.
- ۲- انتخاب یکی از تبدیل های دیجیتال به آنالوگ. به دلیل سادگی معمولا روش دو خطی استفاده می شود و برای سادگی محاسبات $T=2$ فرض می گردد. موضوع جبران جمع شوندگی فرکانسی ضروری است پس محاسبات ذیل انجام می شود.

$$3- \Omega'_p = \Omega_p \cdot \frac{1}{T_s}, \Omega'_s = \Omega_s \cdot \frac{1}{T_s}$$

- ۴- طراحی فیلتر آنالوگ LP بر اساس مشخصات داده شده $\Omega'_p, \Omega'_s, R_p, R_s$
- ۵- تبدیل فیلتر آنالوگ LP به فیلتر آنالوگ مشابه خواسته شده مسئله مانند HP و BP یا دیگر.
- ۶- تبدیل فیلتر آنالوگ به دیجیتال با قراردادن

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- ۷- تبدیل فیلتر آنالوگ LP به فیلتر دیجیتال LP با جاگذاری

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- این بند را به روش دیگری نیز می توان انجام داد که تبدیل فیلتر دیجیتال LP به فیلتر مورد نظر بر اساس جدول تبدیل LP دیجیتال به دیگر انواع می باشد.

مثال تبدیل آنالوگ LP به دیجیتال با مشخصات $\omega_p = 0.45\pi$, $\omega_s = 0.95\pi$, $R_p = 1$, $R_s = 1$ (فیلتر پهنای کم)

۲- جبران جمع شوندگی فرکانسی ناشی از تبدیل آنالوگ به دیجیتال به روش دو خطی. از نظر محاسبات این تبدیل $T=2$ فرض می کنیم.

$\Omega'_p = \Omega_p \cdot \frac{1}{T_s} = \Omega_p \cdot \frac{1}{2} = 0.45\pi$

جدول تبدیل فیلتر LP با فرکانس قطع ω_c به فیلترهای LP, HP, BP و BS			
پارامتر	رابطه تبدیل برای z^{-1}	فرکانس قطع جدید	
$a = \frac{\sin [(\omega_c - \omega'_c)/2]}{\sin [(\omega_c + \omega'_c)/2]}$	$\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	ω'_c	LP
$a = -\frac{\cos [(\omega_c - \omega'_c)/2]}{\cos [(\omega_c + \omega'_c)/2]}$	$-\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	ω'_c	HP
$a_1 = -2\alpha K/(K+1)$ $a_2 = (K-1)/(K+1)$ $\alpha = \frac{\cos [(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos [(\omega_u - \omega_l)/2]}$ $K = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_c}{2}$	$-\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_l = \text{lower}$ $\omega_u = \text{upper}$	BP
$a_1 = -2\alpha/(K+1)$ $a_2 = (1-K)/(1+K)$ $\alpha = \frac{\cos [(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos [(\omega_u - \omega_l)/2]}$ $K = \tan \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_c}{2}$	$\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-1} - a_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_l = \text{lower}$ $\omega_u = \text{upper}$	BS

$$\Omega'_s = T \left(\frac{N-1}{T} \right) = T \left(\frac{0.55\pi}{T} \right) = 1.1708492$$

۱۳. طراحی فیلتر کانترول برای یک سیستم R_p ، R_s ، Ω'_p ، Ω'_s

$$[N, \rho_c] = \text{buttord}(\Omega'_p, \Omega'_s, R_p, R_s, 1/s')$$

$$N = \frac{\log[(\sqrt{A_{\text{stop}}})/\epsilon]}{\log(\frac{\Omega'_s}{\Omega'_p})} = 11.2543$$

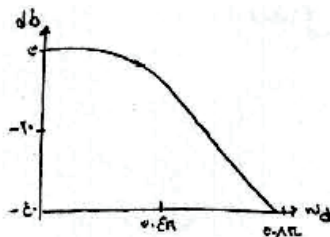
$$\left(\frac{\Omega'_p}{\Omega'_c}\right)^N = \epsilon \Rightarrow \Omega'_c = 0.581148$$

$$p_c = 0.581148 e^{j[N(N+2L-1)/2N]}$$

(c) محاسبه قطبها و استخراج تابع تبدیل

$$H_{\text{an}}(s) = \frac{\Omega_c^N}{s^N (s - p_c)} = \frac{0.203451}{(s + 0.581148)(s^2 + 0.581148s + 0.345918)}$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{butter}(N, \Omega_c, 1/s')$$



۱۴. تبدیل فیلتر کانترول به یک فیلتر دیجیتال

$$z = \frac{r}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{0.0442272(1+z^{-1})^2}{(1-0.0259384z^{-1})(1-0.274218z^{-1}+0.341762z^{-2})}$$

مثال ۲: فیلتر ناچ درجه ۲ در فرکانس ۶۰ هرتز و پهنای باند 3db به مقدار ۶ هرتز طرح کنید. فرکانس نمونه برداری را ۴۰۰ هرتز در نظر بگیرید.

$$H_{\text{an}}(s) = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s^2 + Bs + \Omega_0^2}$$

$$B = \Omega_2 - \Omega_1, \quad \Omega_0^2 = \Omega_1 \Omega_2$$

۱- فیلتر کانترول ناچ تابع تبدیل

تا آنکه Ω_0 فرکانس ناچ و B پهنای باند باشد.

است

$$\omega_0 = \frac{\Omega_0}{T} = \frac{2\pi f_0}{T} = 0.3\pi$$

$$B\omega = \frac{B\Omega}{T} = \frac{B}{0.5} = 0.04\pi$$

۲- با اعمال تبدیل فرکانس دیجیتال به فرکانس آنالوگ

(۳) برای امپدانس و اکتیویتی حالت $T=2$ فرض می‌کنیم از یک تبدیل استفاده می‌کنیم تا آنکه تبدیل دس به یک تبدیل فرکانس شود

$$G(z) = H_{\text{an}}(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{(1+\Omega_0^2) - 2(1-\Omega_0^2)z^{-1} + (1+\Omega_0^2)z^{-2}}{(1+\Omega_0^2+B) - 2(1-\Omega_0^2)z^{-1} + (1+\Omega_0^2-B)z^{-2}}$$

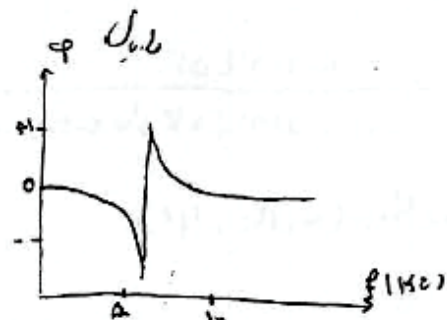
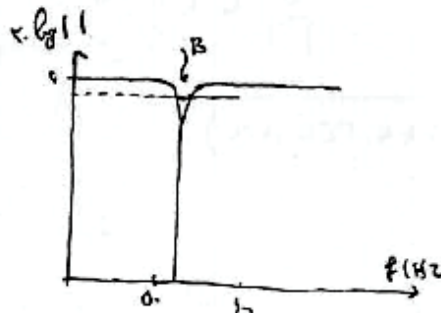
این رابط برای آن است که فرکانس

کودک

$$G(z) = \frac{1}{r} \frac{(1+d) - \beta(1+d)z^{-1} + (1+d)z^{-2}}{1 - \beta(1+d)z^{-1} + dz^{-2}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{-\beta}{1+\Omega_0^2} + 1 = \frac{1 - (\Omega_0 - \Omega_1)}{1 + \Omega_0^2} = 1 - \frac{\frac{1}{r} \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{1}{r} \frac{\omega_0}{\omega_1}}{1 + \frac{1}{r} \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{1}{r} \frac{\omega_0}{\omega_1}} = \frac{1 - \frac{1}{r} \frac{\Omega_1}{\Omega_0}}{1 + \frac{1}{r} \frac{\Omega_1}{\Omega_0}} = 0.8812184 \\ \beta &= \frac{1 - \Omega_0^2}{1 + \Omega_0^2} = \frac{1 - \frac{1}{r} \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{r} \frac{\omega_1}{\omega_0}} = \beta_{BW} = 0.087788 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{0.950809 - 1.105987z^{-1} + 0.1950809z^{-2}}{1 - 1.105987z^{-1} + 0.881218z^{-2}}$$



طراحی با MATLAB

طراحی فیلتر IIR بر اساس فیلتر آنالوگ و تبدیل دو خطی

۱- ورودیها ω_s, R_p, R_s را مشخص کنید.

۲- تعیین درجه فیلتر از دستورات

$$[N, \omega_n] = \text{butterd}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s)$$

$$[N, \omega_n] = \text{cheb1ord}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s)$$

$$[N, \omega_n] = \text{cheb2ord}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s)$$

$$[N, \omega_n] = \text{ellipord}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s)$$

در این دستورات N درجه فیلتر و ω_p و ω_s می باید بر اساس $T=2$ و بین 0 تا 1 معرفی شوند.در فیلتر LP : ω_p و ω_s به ترتیب لبه باند گذر و حذف هستند و $\omega_p < \omega_s$ در فیلتر HP : ω_p و ω_s به ترتیب لبه باند گذر و حذف هستند و $\omega_p > \omega_s$ در فیلتر BP و BS : ω_p و ω_s بردارهای دو المانه مقدار دو طرف باند گذر و حذف را دارند. مقدار اول بردار باید کوچکتر از مقدار دوم باشد.۳- اگر فرکانس ها بر حسب هرتز و فرکانس نمونه برداری F_t باشد ω_p و ω_s اینگونه باید محاسبه شوند $\omega_s = 2F_s/F_t$ و $\omega_p = 2F_p/F_t$.

$$[b, a] = \text{butter}(N, \omega_n)$$

$$[b, a] = \text{cheby1}(N, R_p, \omega_n)$$

$$[b, a] = \text{cheby2}(N, R_s, \omega_n)$$

$$[b, a] = \text{ellip}(N, R_p, R_s, \omega_n)$$

در فیلتر باتر ورث فرکانس قطع 3db است ولی در چپی شف 1 و

الیتیگ لبه باند گذر و در چپی شف 2 لبه باند حذف است

۴- طراحی فیلتر

در طراحی فیلتر HP و BS نوع فیلتر را بصورت 'high' و 'stop' به انتهای

دستورات اضافه کنید.

۵- دستور $freqz(b,a,w)$ پاسخ فرکانسی فیلتر به ازای w نقطه را محاسبه می کند.

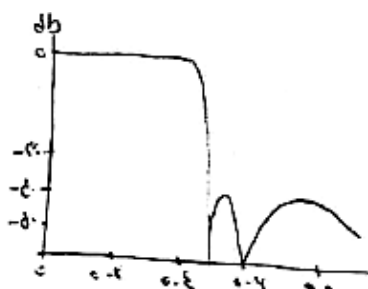
۶- صفرها و قطبهای فیلتر: برای محاسبه صفرها و قطبها دستورات بند b را اینگونه اجرا کنید

$$[z, p, k] = \text{buffer}(N, W_n)$$

مثال 1: فلتير LP المسبب بـ $F_T = 1 \text{ KHz}$, $R_s = 1 \text{ K}\Omega$, $R_p = 10 \text{ K}\Omega$, $F_p = 10 \text{ KHz}$ وتمرير الإشارة بـ $F_T = 1 \text{ KHz}$

$$w_p = \frac{r \cdot F_p}{F_T} = 0.8 \quad , \quad w_s = \frac{r \cdot F_s}{F_T} = 0.2$$

$$[N, w_n] = \text{ellipsoid}(w_p, w_s, R_p, R_s)$$



(۳) طراحى، فیلتر

$$[b, \alpha] = \text{ellip}(N, R_p, R_s, W_n)$$

$$[h, \omega] = \text{freq}(b, a, \Delta t)$$

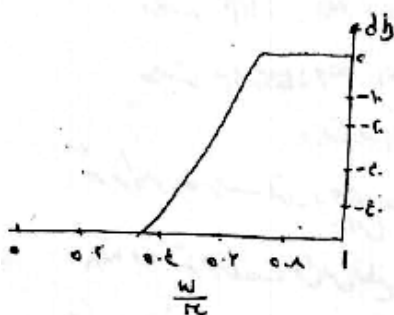
یا دستور *plot* پاسخ فرکانس، اینگونه روی صفحه ظاهر می شود.

مثال ۲: فیلتر جبهه شیب ۲ با $F_p=700\text{Hz}$, $F_s=500\text{Hz}$, $F_t=2\text{kHz}$, $R_p=1\text{db}$, $R_s=32\text{db}$ طراحی کنید.

۱-آماده سازی ورودیها

$$\Rightarrow W_p = \frac{1 \cdot F_p}{5 \text{ kHz}} = \frac{1 \pi \times V_{in}}{5} = 0.5$$

$$W_S = \frac{r \cdot \Delta m}{r_{\text{max}}} = 0.8$$



(7) $[K, w_n] = \text{cheb} \text{ord}(w_p, w_s, R_p, R_s)$ درجه بندی

(۴) $[b, a] = \text{cheb7}(N, \rho, w_n, 'high')$ بازخورد بالا

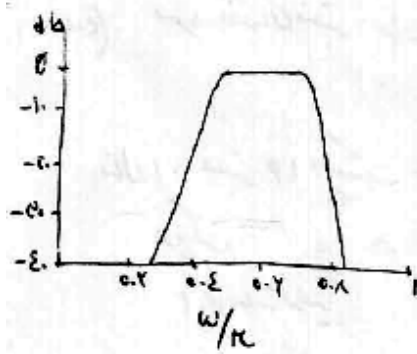
(c) $[h, \text{one} \cdot a] = \text{freq}(b, a, \text{rad})$

④ رسم پانچ زکاتنی بارستر *phat*

مثال ۳: نسبت R_p : نسبت مابین درخت و عریضی طرح کند که $R_p = 1.66$, $R_g = 0.66$ و سهم های بایندها ۴۵۰ و ۴۵۰

$$w_{p1} = \frac{r \times \epsilon \Delta \phi}{r_{\text{max}}} = 0. \epsilon \Delta \phi$$

$$w_{PI} = 0.4\Delta, \quad w_{SI} = 0.1^{\circ}, \quad w_{SR} = 0.4\Delta \Rightarrow w_p = [0.4\Delta \quad 0.4\Delta], \quad w_s = [0.1^{\circ} \quad 0.4\Delta]$$



۱- تعیین مشخصه‌ها $[N, \omega_n] = \text{butterd}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s)$

۲) طرح فیلتر $(b, a) = \text{butter}([N, \omega_n])$

۳) محاسبه پاسخ فرکانسی $[h, \omega] = \text{freqz}(b, a, 1024)$

۴) مشاهده و رسم plot

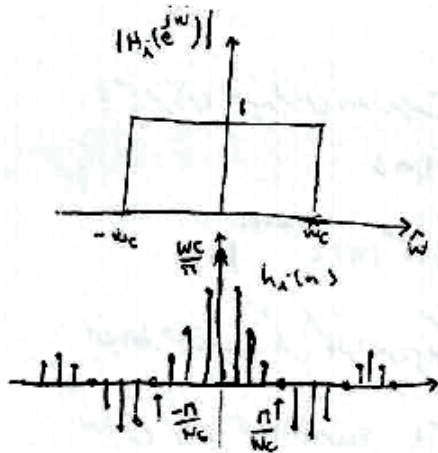
۴-۶ طراحی پنجره ای دیجیتالی فیلترهای FIR

۱-۴-۶ اعمال پنجره بر پاسخ ضربه فیلتر ایده آل

(a-۱) فیلتر LP ایده آل فیلتری است با بهره 1، $\delta s=0$ ، $\delta p=0$ و $\omega s-\omega p=0$ که در

شکل نشان داده شده است.

پاسخ ضربه این فیلتر ایده آل برابر است با:



$$H_A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$h_A(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_A(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\Rightarrow h_A(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{n\pi}$$

پاسخ ضربه این فیلتر نشان می دهد که فیلتر علی نیست، چون برای $n < 0$

مقدار $h(n) \neq 0$ است. ضمناً پاسخ ضربه این فیلتر از دو طرف به بینهایت می رود لذا این دنباله جمع پذیر پایدار و قابل ساخت نه بصورت

FIR و نه بصورت IIR نیست

بهترین تقریب FIR علی پایدار به فیلتر ایده آل

اگر بهترین تقریب را با $H_0(\omega)$ معرفی کنیم، یک روش آن است که از حداقل کردن انتگرال مربعات خطا استفاده شود. خطای باقیمانده آنگاه انحراف فیلتر تقریبی از فیلتر ایده آل است.

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0(e^{j\omega}) - H_A(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

فرض کنید که فیلتر FIR تقریبی با پاسخ ضربه $h_0(n)$ مشخص شود که طول آن M باشد، بنابراین

$$\begin{aligned} H_0(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} h_0(n) e^{-j\omega n} \Rightarrow \text{طبق رابطه بار سوال} \quad \varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_0(n) - h_A(n)|^2 = \\ &= \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} |h_0(n) - h_A(n)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-\frac{M-1}{2}} |h_A(n)|^2 + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^{\infty} |h_A(n)|^2 \end{aligned}$$

دو

جمله آخر مقدار مثبتی دارند و لذا φ می تواند (به ازای یک M مشخص) حداقل گردد. اگر

$$h_0(n) = h_A(n) \quad -\frac{M-1}{2} \leq n \leq \frac{M-1}{2}$$

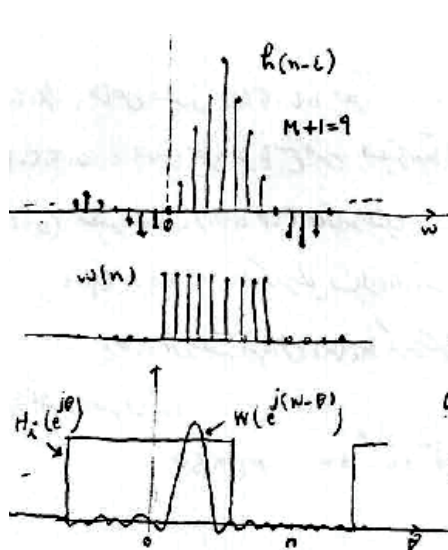
باشد، $h_0(n)$ غیر علی است، لذا به اندازه $(M-1)/2$ شیفت داده می شود تا

$$h(n) = h_0(n - \frac{M-1}{2})$$

بدست آید. حالا $H(\omega)$ و $H_0(\omega)$ هر دو دامنه پاسخ فرکانسی برابر دارند ولی $H_0(\omega)$ غیر علی فاز صفر و $H(\omega)$ علی و فاز آن خطی است.

(c-۱) راهکار بند b را این گونه می توان بیان کرد که پاسخ ضربه فیلتر تقریبی برابر با حاصلضرب پنجره

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{غیرنقطه} \end{cases}$$



در پاسخ ضربه شیفت داده شده فیلتر ایده آل است.

$$h(n) = h_A(n - \frac{M-1}{2}) w(n)$$

پاسخ فرکانسی فیلتر تقریبی اینگونه بدست می آید.

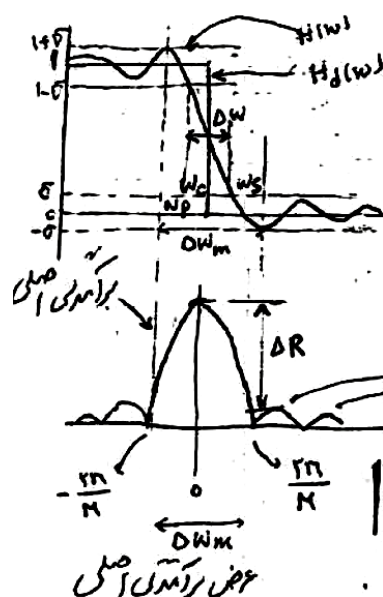
$$h(n) = h_A(n) w(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_A(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

این رابطه کانولوشن پریودیک پاسخ فرکانسی فیلتر ایده آل با پاسخ فرکانسی پنجره اعمالی است. کانولوشن روی شکل نشان داده شده است.

پاسخ فرکانسی پنجره برابر است با

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} * \frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$



نوسانات روی فیلتر تقریبی ناشی از برآمدگیهای کناری (sidelobes) پاسخ فرکانسی پنجره است. در تئوری سری فوریه این امر به پدیده گیبس Gibbs معروف است. به این ترتیب که همگرایی بصورت غیر یکنواخت است. عامل ایجاد این امر، وجود تغییرات تند در لبه های $w(n)$ است. بنابر این اگر افت در لبه ها کند تر گردد انتظار می رود دامنه برآمدگیها کاهش یابد.

این مسئله زمینه معرفی پنجره های دیگری را فراهم آورده است که عملکردهای متفاوتی را از خود نشان می دهند. در جدول پاسخ ضربه و شکل تعدادی از پنجره ها را ارائه شده اند. شکلهای نیز پاسخ فرکانسی پنجره ها و فیلترهایی که با آنها ساخته شده اند را نشان می دهند.

در پنجره قابل تنظیم Kaiser دو پارامتر M ، β وجود دارند. M طول پنجره و β پارامتری است که شکل پنجره را تغییر می دهد. با تغییر β می توان از پنجره کیزر تمامی پنجره های قبلی را ساخت. I_0 تابع بسل درجه صفر است.

$$I_0(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^r}{r!} \right]^2$$

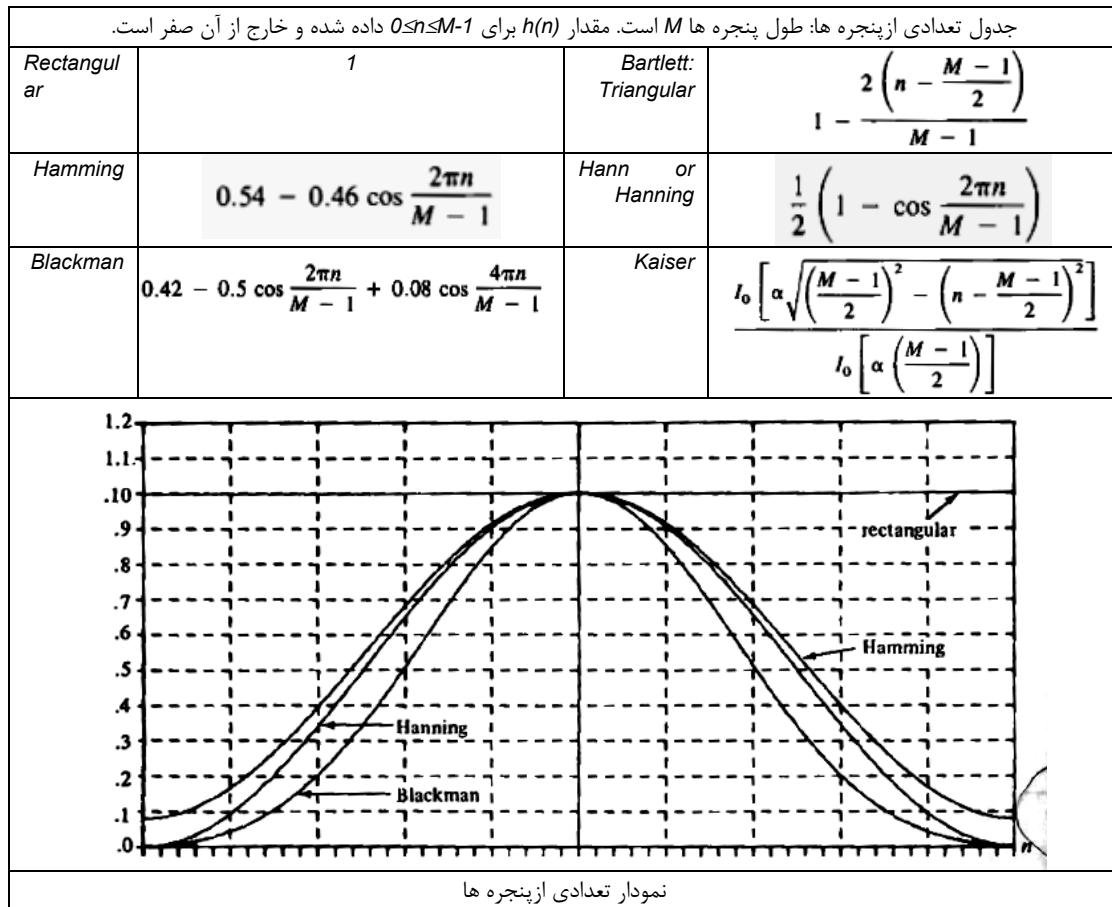
در عمل برای محاسبه تابع بسل از مقدار r از ۱ تا ۲۰ استفاده می شود.

تابع تبدیل فیلتر با در نظر گرفتن پاسخ ضربه فیلتر ایده آل

$$h_A(n) = \frac{\sin n\omega_c}{n\pi}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n) h_A\left(n - \frac{M-1}{2}\right) z^{-n}$$

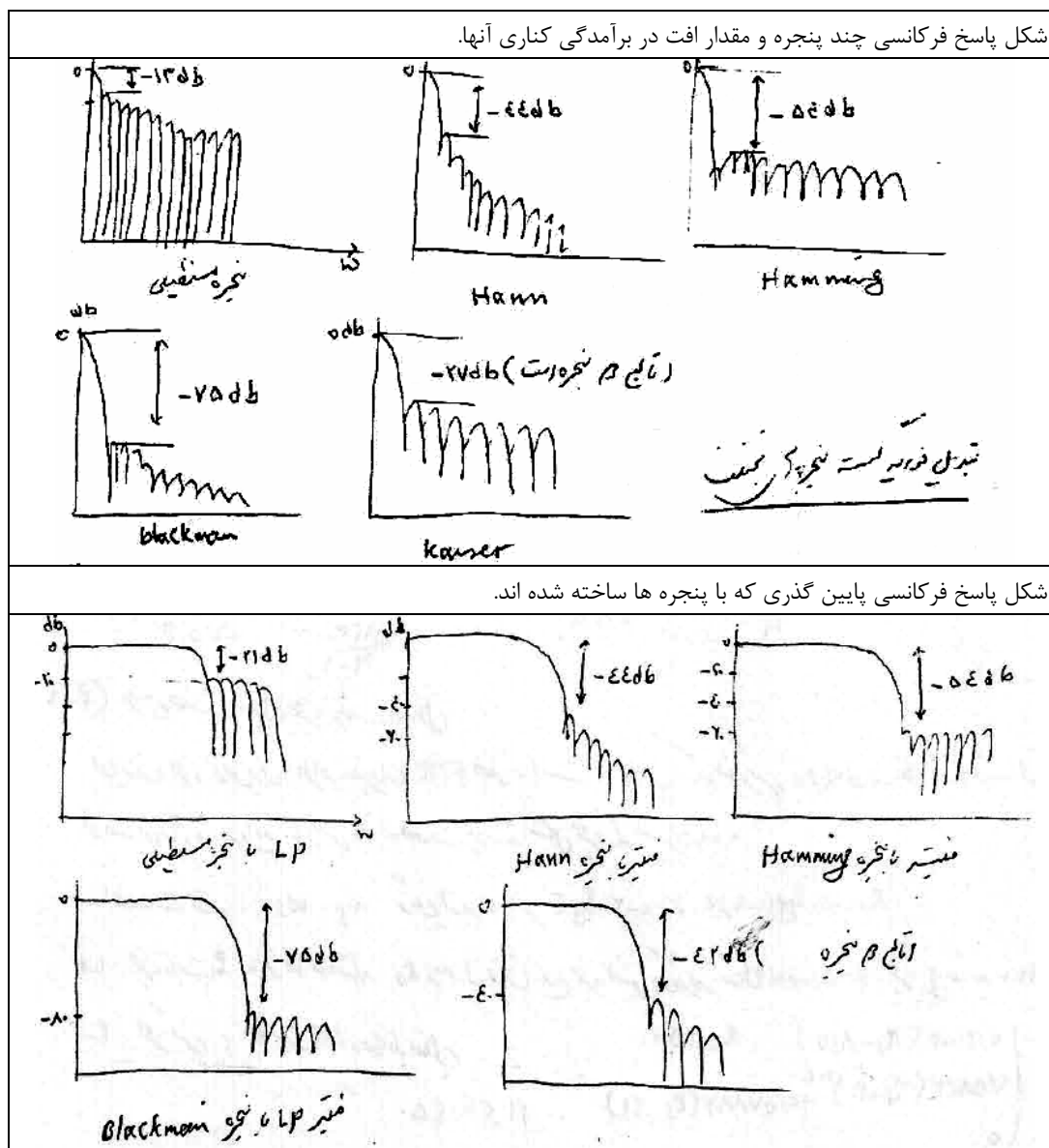
و پنجره اعمالی، $w(n)$ ، که طول M دارد برابر با رابطه ذیل می گردد



مشخصات فیلتر های پنجره ای

- افزایش طول فیلتر M عرض برآمدگی اصلی $\Delta\omega$ و به تبع آن عرض باند انتقالی فیلتر ΔW را کاهش می دهد.
- M تأثیری بر سطح زیر بر آمدگیهای کناری ندارد لذا نمی تواند تضعیف باند حذف فیلتر R_s را کنترل کند.
- در پنجره های ثابت، پنجره ای که افت بر آمدگی کناری ΔR_m بیشتر دارد عرض بر آمدگی اصلی $\Delta\omega$ بزرگتری نیز دارد. بنابراین پنجره ای که R_s بیشتری می دهد عرض باند انتقالی آن نیز بزرگتر است $\Delta\omega$.
- در پنجره قابل تنظیم کیزر علاوه M (طول فیلتر) که عرض باند انتقالی را کنترل می کند. پارامتر β نیز وجود دارد که می تواند تضعیف باند حذف را کنترل کند.
- در این فیلتر ها δp و δs تقریباً برابرند و امکان تنظیم مستقل R_p و R_s وجود ندارد.
- جدول زیر برخی از مشخصات پنجره های ثابت را ارائه می کند که در طراحی مورد استفاده قرار می گیرند.

نوع پنجره	مشخصات پنجره		مشخصات فیلتر	
	$\Delta\omega$	ΔR_m db	$\Delta\omega$	R_s db
مسطحی	$\frac{4\pi}{M}$	-13	$\frac{1.81\pi}{M-1}$	-21
Hanning	$\frac{8\pi}{M}$	-31	$\frac{6.22\pi}{M-1}$	-44
Hamming	$\frac{8\pi}{M}$	-43	$\frac{6.64\pi}{M-1}$	-54
Blackman	$\frac{12\pi}{M}$	-58	$\frac{11.12\pi}{M}$	-75



طراحی فیلتر با اعمال پنجره بر فیلتر ایده آل

این روش جزء اولین روشها طراحی فیلترهای FIR خطی فاز است. به دلیل اینکه فیلتر $Kaiser$ قابل انعطاف تر است استفاده از آن توصیه می شود. در واقع پارامتر β به صورت پیوسته شکل پنجره را تغییر می دهد.

۱- اطلاعات اولیه: ω_s و ω_p و یکی از دو پارامتر $R_s = -20 \log \delta$ یا $R_p = -20 \log(1-\delta)$

۲- پنجره ثابت: با توجه به مقدار R_s و جدول فوق نوع پنجره تعیین می گردد. برای نمونه اگر $R_s = 45 \text{ dB}$ باشد پنجره $Hamming$ انتخاب می گردد. برای پنجره کیزر، محاسبه β از روابط ذیل بدست می آید.

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(R_s - 17) & R_s > 50 \\ 0.05842(R_s - 21)^{0.4} + 0.07711(R_s - 21) & 21 \leq R_s \leq 50 \\ 0 & R_s < 21 \end{cases}$$

سپس تابع پنجره $W(m)$ مربوطه باید محاسبه شود.

$$w_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2}$$

۳- تعیین طول پنجره: در پنجره ثابت $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ و مقدار M را بدست آورید. در پنجره کیزر مقدار M از رابطه ذیل بدست می آید.

$$M = \frac{B_s - 1}{2,185 BW} + 1$$

توجه: در فیلترهای میان گذر و میان نگذر که دارای دو باند انتقالی هستند $\Delta\omega_1 = |\omega_{s1} - \omega_{p1}|$ و $\Delta\omega_2 = |\omega_{s2} - \omega_{p2}|$ محاسبه و کوچکترین مقدار را بعنوان $\Delta\omega$ در نظر بگیرید

۴- پاسخ ضربه فیلتر ایده آل:

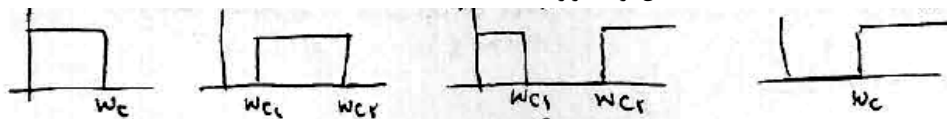


فیلتر ایده

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2}$$

اگر پاسخ فرکانسی داده شده ایده آل نباشد ($\omega_s \neq \omega_p$)، با محاسبه آل بسازید و سپس با رابطه IDFT، $h(n)$ آنرا محاسبه کنید.

مقدار $h(n)$ برای فیلترهای LP, BP, HP, BS ایده آل از اینقرار است.



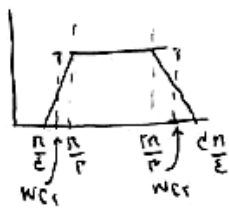
$$h_{LP}(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}, \quad h_{BP}(n) = \frac{\sin(n\omega_{c2}) - \sin(n\omega_{c1})}{n\pi}, \quad h_{BS}(n) = \frac{\sin(n\omega_{c1}) - \sin(n\omega_{c2})}{n\pi}, \quad h_{HP}(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$$

سپس می باید نوع تقارن $h(n)$ تعیین گردد و زوج یا فرد بودن M در انطباق با انواع فیلترهای خطی فاز FIR تعیین شود. برای مثال $h_{HP}(n)$ متقارن (تابع زوج) است لذا با M زوج (خطی فاز نوع دوم) قابل ساخت نیست و M باید فرد انتخاب شود. ناگفته پیداست که با این روش می توان فیلتر چند بانده نیز طرح کرد.

۵- تابع تبدیل فیلتر: در نهایت تابع تبدیل فیلتر

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n) h(n - \frac{M-1}{2}) z^{-n}$$

بدست می آید که در آن $W(n)$ تابع پنجره $h(n)$ پاسخ ضربه فیلتر ایده آل است.



مثال ۲۱: مشخصات زیر با مشخصات $R_s = 0.01$ dB، $R_p = 1$ dB، $\omega_s = [\frac{n}{E}, \frac{cn}{E}]$ ، $\omega_p = [\frac{n}{P}, \frac{n}{P}]$ با پنجره Hamming تطبیق داده شود.

(الف) از این R_p و R_s می تواند که ضریب های δ_p و δ_s را تعیین کرد.

$$R_p = 1 \text{ dB} = -20 \log(1 - \delta_p) \Rightarrow \delta_p = 0.108$$

$$R_s = -20 \log \delta_s = 0.01 \Rightarrow \delta_s = 0.0031223$$

$$\Rightarrow \delta = \delta_s \Rightarrow R_s = -20 \log \delta = 0.01$$

$$R_p' = -20 \log(1 - \delta) = 0.0275$$

بنابراین آنچه به عنوان ضریب های R_p و R_s در محاسبات استفاده می شود.

(ب) تعیین پنجره: برای $R_s = 0.01$ dB، پنجره Hamming را در نظر بگیرید.

$$W(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$$

$$0 \leq n \leq M-1$$

M بر مبنای ϵ تعیین می گردد.

۸- تعیین M :

$$\left| \begin{aligned} \Delta\omega_1 &= \frac{n}{E} - \frac{n}{E} = \frac{n}{12} \\ \Delta\omega_2 &= \frac{cn}{E} - \frac{cn}{E} = \frac{n}{12} \end{aligned} \right. \Rightarrow \Delta\omega = \frac{n}{12} \Rightarrow \frac{41.44\pi}{M-1} = \Delta\omega = \frac{n}{12} \Rightarrow M = 811.48 \approx 811$$

(د) از فیلتر غیر ایده‌آل داریم: فیلتر ایده‌آل با باند W_{c1} و W_{c2} ساخته می‌شود. $h_c(n)$ آن به صورت زیر است:

$$W_{c1} = \frac{\pi}{T} + \frac{\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}, \quad W_{c2} = \frac{\pi}{T} - \frac{\pi}{T} = 0$$

$$h_c(n) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-W_{c1}}^{W_{c1}} e^{j\omega n} d\omega + \int_{W_{c2}}^{W_{c2}} e^{j\omega n} d\omega \right) = \frac{1}{\pi n} (\sin(W_{c1}n) - \sin(W_{c2}n)) = h_{c1}(n) = \frac{W_{c1} - W_{c2}}{\pi}$$

این پاسخ ضرب به هم می‌آید. لذا هم با فیلتر فرورد هم با فیلتر خروجی (۲، ۳) می‌توان فیلتر FIR خطی فاز ساخت.

$$h_{BP}(n) = W(n) h_c(n - \frac{M-1}{2}) \quad 0 \leq n \leq M-1$$

(۵) پاسخ ضرب به هم

طراحی به هم

(۱) مانتور: $f_{c1} = f_{c2} = 1000$ Hz, $f_{s1} = f_{s2} = 2000$ Hz, $M = 10$, $b = f_{c1}(M-1, [W_{c1}, W_{c2}]/f_s, \text{hamming}(M))$; $f_{c1} = 1000$ Hz, $f_{s1} = 2000$ Hz

(۲) مانتور: $f_{c1} = 1000$ Hz, $f_{s1} = 2000$ Hz

$$M = 10; n = 0 : M-1; nd = n - \frac{M-1}{2};$$

$$b_1 = (\sin(nd * W_{c1}) - \sin(nd * W_{c2})) / (nd * \pi + 1e-15);$$

$$if \text{mod}(M, 2) \neq 0; b_1(\frac{M-1}{2} + 1) = \frac{W_{c1} - W_{c2}}{\pi}; \text{end}; b_1 = b_1 * \text{hamming}(M);$$

$$freqz(b_1, 1)$$

مثال ۶۲: مثال ۶۱ را برای پنجره کیزر حل کنید.

جواب: مانند مسئله ۶۱، $R_s = 50$ می‌گردد.

$$R_s = 50 \Rightarrow \beta = 0.1102 (R_s - 1) = 4.9512$$

(ب) برای R_s ، β به صورت زیر

مماست: فیلتر کیزر به صورت زیر شکل است. لذا باید از دستور kaiser استفاده کرد و پارامترهای زیر را در نظر گرفت.

$$W(n) = \text{kaiser}(M, 4.9512)$$

در قدم بعدی نشان می‌دهیم.

۸. مماست: M از رابطه زیر

$$M = \frac{R_s - 1}{1.2885 \Delta \omega} + 1 = 71.2 \approx 72$$

تعداد $\Delta \omega$ ما به روش سید ۴۱ نشان می‌دهد.

(د) تعیین پاسخ ضرب به هم فیلتر به سید ۴۱ انجام می‌دهیم.

(ه) به هم می‌زنیم پاسخ ضرب به هم

$$h_{BP}(n) = W(n) h_c(n - \frac{M-1}{2}) \quad 0 \leq n \leq M-1$$

تذکر: در روش کیزر $M=72$ در مقایسه با $M=81$ مربوط به استفاده از پنجره ثابت بدست آمد. مشخصات فیلتر به روش کیزر

$R_p = 0.026 \text{ db}$, $R_s = 50 \text{ db}$ است ولی در مقابل مشخصات فیلتر وقتی از پنجره ثابت استفاده شد، $R_p = 0.0295 \text{ db}$, $R_s = 52 \text{ db}$

است. ولی آنچه باید به ذهن سپرد این است که روش کیزر فیلتر را با درجه کمتر یا حد اکثر مساوی با روش پنجره ثابت تولید

می‌کند که یک مزیت است.

طراحی با MATLAB

$$[N, wc, beta, type] = \text{kaiserord}([ws1, wp1, wpr, ws2]/f_s, [0, 1], [\delta_s, \delta_p, \delta_s])$$

$$ws1 = \frac{\pi}{T}, \quad wp1 = \frac{\pi}{T}, \quad wpr = \frac{\pi}{T}, \quad ws2 = \frac{\pi}{T}$$

$$\delta_0 = -20 \log \delta_s, \quad 1 = -20 \log(1 - \delta_p)$$

$$\Rightarrow N=71 \quad \text{فیلتر}, \quad \omega_c = [0.2917, 0.7083], \quad \beta = 1.5325,$$

$$b = \text{firls}(N, \omega_c, \text{type}, \text{kaiser}(N+1, \beta, 1)), \quad \text{freqz}(b, 1)$$

۲-۴-۶ دستورات MATLAB برای طراحی فیلترها بر اساس پنجره

- ۱- ورودیهای لبه های δ_s و لبه های Ω_p ، R_s یا R_p و T پریود نمونه گیری هستند.
- ۲- اگر R_p داده شود از رابطه $R_p = -20 \log(1 - \delta)$ مقدار δ بدست آمده و سپس $R_s = -20 \log \delta$ محاسبه می گردد. اگر هم R_s و هم R_p داده شود از بین δ_p و δ_s آن یکی انتخاب می گردد. که R_s بزرگتری تولید می کند.
- ۳- محاسبه لبه های $\omega_s = \Omega_s T$ و $\omega_p = \Omega_p T$
- ۴- تولید پنجره

- پنجره ثابت: در این حالت با توجه به R_s به جدول مراجعه شده و پنجره مناسب انتخاب می گردد. ($R_s > 19$) پنجره مستطیلی (سپس باندهای انتقالی $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ محاسبه شده و کوچکترین آنها انتخاب و از جدول مقدار M محاسبه می گردد).
- پنجره کیزر: با اجرای دستور مقابل درجه فیلتر $M-1$ و β محاسبه می گردد.

$$[N, \omega_n, \beta, \text{ftype}] = \text{kaiserord}(fpts, mag, dev)$$

$$fpts = \left[\frac{\omega_p}{\pi}, \frac{\omega_s}{\pi} \right] \quad \text{تمام لبه های فیلتر به طور صعودی در این بردار مرتب می شوند. مثلاً برای فیلتر LP}$$

$$mag = [1, 0] \quad \text{بردار دامنه است که مقدار مطلوب دامنه در باندها را مشخص می کند مثلاً ۱ برای باند گذر و ۰ برای باند حذف.}$$

$$dev = [\delta_p, \delta_s] \quad \text{بردار پیل است که برای هر باند باید جداگانه تعریف شود.}$$

این بردارها برای یک فیلتر میانگذر این مقادیر را به خود می گیرند.

$$fpts = [\omega_{s1}, \omega_{p1}, \omega_{p2}, \omega_{s2}] / \pi$$

$$mag = [0, 1, 0] ; \quad dev = [\delta_s, \delta_p, \delta_s]$$

خروجی دستور: N درجه فیلتر ($M = N+1$ طول فیلتر) ω_n فرکانس لبه های فیلتر ایده آل β پارامتر پنجره کیزر و ftype نوع است. در نهایت پنجره مورد نظر تولید می گردد.

$$w = \text{blackman}(N+1); \quad w = \text{hamming}(N+1)$$

$$w = \text{hanning}(N+1); \quad w = \text{kaiser}(N+1, \beta)$$

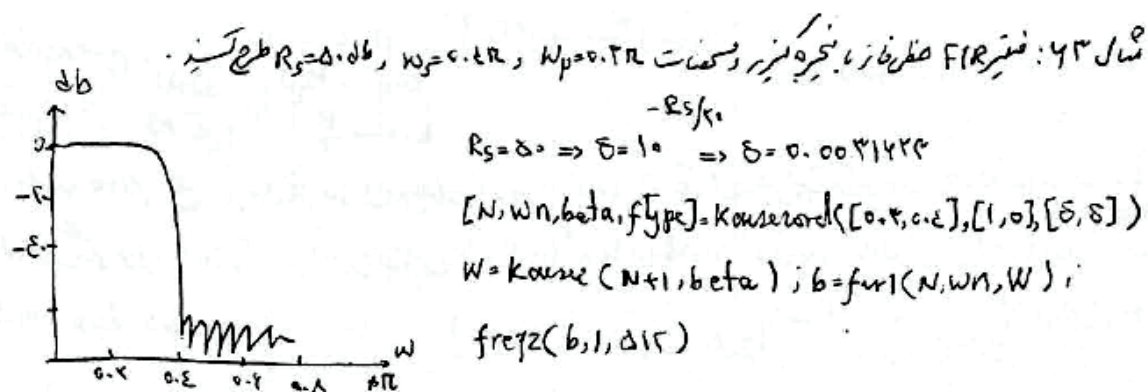
۴- تعیین فیلتر: با اجرای دستور

$$b = \text{firls}(N, \omega_n, \text{'ftype'}, w)$$

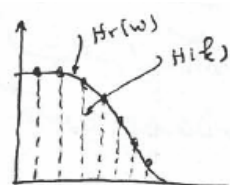
که b برداری با طول M است که

$$H(z) = \sum_{k=0}^N b(k+1) z^{-k}$$

N درجه فیلتر (نه طول فیلتر)، ω_n بردار بطور صعودی مرتب شده لبه های فیلتر (بین صفر و ۱) و ftype برای فیلتر HP ، $high$ ، و برای BS ، $stop$ است. w بردار پنجره است.



۳-۴-۶ تطبیق پاسخ فرکانسی



فیلتری با دامنه (حقیقی) پاسخ فرکانس $H_r(\omega)$ در اختیار است. هدف طرح فیلتر FIR خطی فاز است که دامنه پاسخ فرکانس آن $H_r(\omega)$ باشد.

در این روش از پاسخ فرکانس نمونه برداری در M نقطه متساوی الفاصله گرفته شده تا $H(k)$ بدست آید.

$$H(k+\alpha) = H_r(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha)} \quad k=0, \dots, M-1$$

در این رابطه $\alpha=0$ or 0.5 است که دلیل آن بعداً روشن می شود. هدف آن است که از $H(k+\alpha)$ تابع ضربه ای برای فیلتر محاسبه کرد. لذا می نویسیم.

$$H_r(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h_r(n) e^{-j\omega n} \Rightarrow H(k+\alpha) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h_r(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}n(k+\alpha)}$$

حال از این رابطه IDFT می گیریم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j\frac{2\pi}{M}kn} &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} h_r(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}n(k+\alpha)} e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} h_r(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}n\alpha} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha)} = \begin{cases} h_r(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}n\alpha} & n-\alpha=0, \dots, M-1 \\ 0 & \text{غیراین} \end{cases} \\ \Rightarrow h_r(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \end{aligned}$$

به این ترتیب بین نمونه گیری از $H(k+\alpha)$ و پاسخ ضربه فیلتر (دنباله ضرایب فیلتر) ارتباط برقرار می گردد. از آنجائیکه $H(k+\alpha)$ حقیقی (بدون فاز) در نظر گرفته شد و صفر فاز است $h_r(n)$ متقارن یا با تقارن معکوس بدست نمی آید برای اینکه $h_r(n)$ متقارن گردد باید $(M-1)/2$ شیفت داده شود اگر M فرد باشد می توان $h(n)$ متقارن یا با تقارن معکوس را

بصورت $h_s(n) = h_r(n - \frac{M-1}{2})$ بدست آورد ولی برای M زوج ممکن نیست.

برای رفع این مشکل به $H(k+\alpha)$ متناسب با $e^{-j\omega \frac{M-1}{2}}$ فاز خطی داده می شود تا $H_s(k+\alpha)$ بدست آید که مشابه شیفت دادن $h(n)$

به مقدار $(M-1)/2$ تا $h_s(n) = h_r(n - \frac{M-1}{2})$ بدست آید:

لذا می نویسیم.

$$H_s(k+\alpha) = H_r(k+\alpha) e^{[-j \frac{2\pi}{M} (k+\alpha) \frac{M-1}{2} + j \beta \frac{2\pi}{M}]} \quad \beta=0 \text{ و } 1$$

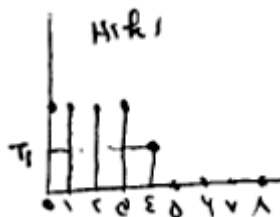
$k=0 \dots \frac{M-1}{2} \quad (\text{فر } M)$
 $k=0 \dots \frac{M}{2} \quad (\text{ع } M)$

به ازای $\beta=0$ تابع $hs(n)$ متقارن و به ازای $\beta=1$ ، $hs(n)$ با تقارن معکوس بدست می آید در حالت اخیر $H(\omega=0)$ باید صفر باشد از طرف دیگر چون $hs(n)$ حقیقی است پس $hs(k+\alpha) = H^* s(M-k-\alpha)$ باید گردد. لذا به این ترتیب $hs(k+\alpha)$ برای $k=0, \dots, M-1$ را می نویسیم.

$$H_s(k+\alpha) \Big|_{k=\frac{M-1}{2} \rightarrow M-1} = H_s^*(k+\alpha) \Big|_{k=\frac{M-1}{2} \rightarrow 1} \quad (\text{فر } M)$$

$$H_s(k+\alpha) \Big|_{k=\frac{M}{2}+1 \rightarrow M-1} = H_s^*(k+\alpha) \Big|_{k=\frac{M}{2}-1 \rightarrow 1} \quad (\text{ع } M)$$

این روش ساده ای است ولی جواب بدست آمده به ازای M کوچک ممکن است پاسخ فرکانس متناسبی تولید نکند افزایش M برای عبور کیفیت فیلتر از طرف دیگر راندمان محاسباتی را کاهش می دهد.

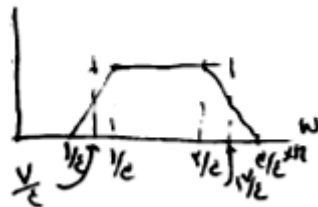


اگر $H_r(\omega)$ دارای لبه های تیزی باشد برآمدگی کناری بزرگ در فیلتر ایجاد می گردد که Rs را محدود می کنند برای رفع این مشکل جداولی به روش بهینه به ازای طول M و پهنای بند محاسبه گردیده است که برای نقاط باند اتصالی مقادیری پیشنهاد می کنند تا بهترین کارایی بدست آید. پارامتر α نیز در این رابطه به کار گرفته می شود. برای مثال برای فیلتری LP با $M=16$ و $BW=4$ و $\alpha=0$ جدول مقدار $T1=0.398$ را پیشنهاد می کند که افت حدود 36 db در برآمدگی کناری را به همراه دارد. همین جدول برای $\alpha=0.5$ مقدار $T=0.363$ را می دهد که منجر به افت برآمدگی کناری حدود 44 db می گردد. این روش به شرطی سادگی خود را حفظ می کنند که M کوچک باشد و در این حال نیاز به دسترسی به جداول حاوی مقادیر برای باند اتصالی اجتناب ناپذیر است.

۴-۴-۶ روش کامپیوتری به کارگیری روش تطبیق پاسخ فرکانس

در این روش وقتی فیلتری با طول M مورد نیاز است از $H(\omega)$ به تعداد $N=2^L > M$ نمونه گیری می شود و از دستور $IFFT$ استفاده گردیده تا $hs(n)$ بدست آید. سپس با اعمال پنجره به طول M ، ضرایب فیلتر حاصل می گردد. $N=2^L$ انتخاب می گردد تا بتوان از دستور $IFFT$ استفاده کرد. دستور $fir2$ مربوط به $MATLAB$ نیز به این روش کار می کنند.

مثال ۶۴: مثال ۶۱ را به روش تطبیق پاسخ فرکانسی حل کنید.



(a) بر اساس مشخصات فیلتر و محاسبات انجام شده در مثال ۶۱، مقدار $M=61$ و پنجره $Hamming$ بدست آمد.

(b) عدد N را از رابطه $N=2^L=1024 > 10M$ انتخاب کنید.

(c) از فیلتر میان گذر ایده آل که از خواسته های مسئله بدست می آید، نمونه گیری گردد

(d) در فاصله $0 \leq \omega < 2\pi$ مقدار $N=1024$ نمونه وجود دارند لذا در فاصله $0 \leq \omega \leq \pi$ تعداد

نقاط ۵۱۳ می گردد. لبه های فیلتر ایده آل $(7\pi/4, 17\pi/4)$ به این ترتیب نمونه های ۱۴۹ و ۳۶۲ می گردند. برنامه $MATLAB$ ذیل اجرای طرح فیلتر را ارائه می کند زوج است.

$$N=1024; M=61; NC1=149; NC2=362; b=0; k=0: \frac{N}{2};$$

$$\begin{aligned}
 H_r &= \text{zeros}(1, \frac{N}{P}+1); H_r(NC1:NC2) = \text{ones}(1, NC2-NC1+1); \\
 H_s &= H_r * \exp(-j * (\frac{2 * P * L}{N}) * (M-1) * k + j * b * \frac{P * L}{P}); \\
 H_s &= [H_s, \exp(j * H_s(\frac{N}{P}:-1:2))]; h_{fft} = \text{fft}(H_s); \\
 h &= \text{hpl}(1:m) * \text{hamming}(m); \text{freqz}(b, 1)
 \end{aligned}$$

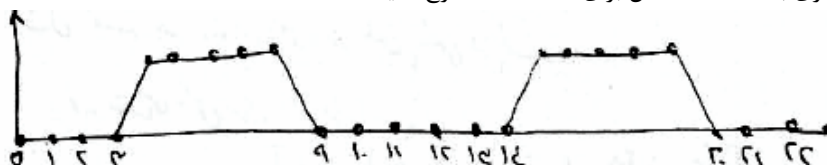
محاسبات فوق را مستقیماً از طریق دستور *fir2* نیز می توانستیم انجام دهیم.

$$M=81; N=1024;$$

$$\begin{aligned}
 b &= \text{fir2}(M-1, [0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}, 1], [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], \frac{N}{P}, \text{hamming}(M1)) \\
 \text{freqz}(b, 1)
 \end{aligned}$$

در شرایطی که بخواهیم $N+M$ باشد از دستور *fir2* نمی توان استفاده کرد چرا که این الگوریتم خودکار $N=2^L \Rightarrow 2M$ را انتخاب می کنند. لذا باید از برنامه *MATLAB* که در بالا ارائه شده است باید سود برد.

مثال ۶۵: از روش تطبیق فرکانس فیلتری با مشخصات شکل برای $N+M+23$ طرح کنید.



$$\begin{aligned}
 N &= 2^3; M = 2^3; NC1 = 0; NC2 = 9; b = 0; k = 0; \frac{N-1}{P} \\
 H_r &= \text{zeros}(1, \frac{N}{P}+1); H_r(NC1:NC2) = \text{ones}(1, NC2-NC1+1); \\
 H_s &= H_r * \exp(-j * (\frac{2 * P * L}{N}) * (M-1) * k + j * b * \frac{P * L}{P}); \\
 H_s &= [H_s, \exp(j * H_s(\frac{N}{P}:-1:2))]; h_{fft} = \text{fft}(H_s); \text{freqz}(b, 1)
 \end{aligned}$$

از آنجائیکه $N=M$ است دیگر نیازی به اعمال پنجره نیست. لازم به تذکر است که پاسخ این مسئله با مشخصات داده شده تناسبی ندارد و فقط برای آشنایی با نحوه حل مسئله به ازای N فرد ارائه شد.

۵-۴-۶ طراحی به روش نمونه گیری از فیلتر مطلوب با *MATLAB*

این روش طراحی فیلتر را با دستور ذیل اجرا می کند.

$$b = \text{fir2}(N, f, m, npt, \text{window})$$

b : برداری با $N+1$ المان که ضرایب چند جمله ای فیلتر هستند

N : درجه فیلتر که باید مشخص گردد. و از محاسبات بخش قبلی می توان سود برد.

f : فرکانس دیجیتال نرمال شده نقاط شکست در فیلتر مطلوب،

اولین المان آن باید صفر و آخرین ۱ باشد وجود فرکانس تکراری مجاز است. در محاسبه ی مقادیر f فرکانس نمونه برداری را ۲ منظور کنید.

m : دامنه فیلتر در فرکانس های مشخص شده در f

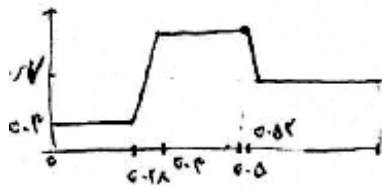
npt : این الگوریتم ابتدا توسط میان یابی اطلاعات موجود در f و m را گسترش داده و در تعداد نقاط برابر npt ، فرکانس مقدار دامنه را تعیین می کند که محتویات بردار m جز آنها هستند اگر npt مشخص نشود عدد ۵۱۲ منظور می گردد.

$window$: در این الگوریتم ابتدا از مقادیر نمونه گیری پاسخ فرکانس *IDFT* گرفته و سپس $h(n)$ را بدست می آورد سپس

$h'(n)$ در پنجره مشخص شده ضرب و پارامترهای فیلتر بدست می آید. اگر پنجره مشخص نشود به طور خودکار از *Hamming* استفاده می کند در غیر این صورت از پنجره معرفی شده با بردار W استفاده می گردد.

مثال: فیلتر درجه ۱۰۰ با ۳ باند طبق شکل طرح کنید.

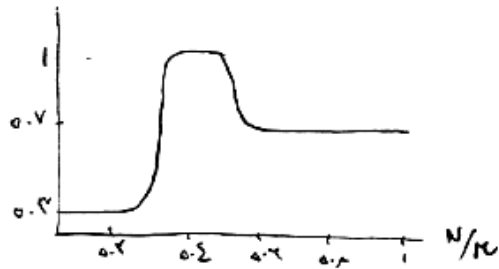
براساس شکل بردار f و m برابر هستند با:



$$f = [0 \quad 0.28 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.52 \quad 1]$$

$$m = [0.2 \quad 0.2 \quad 1 \quad 1 \quad 0.7 \quad 0.7] \quad \text{بردار } m$$

اجرای دستور با پنجره *Hamming* و $npt=512$ نتیجه می دهد.



$$b = \text{firls}(100, f, m)$$

$$\text{freqz}(b, 1, 512)$$

۵-۶ طراحی بهینه فیلتر دیجیتالی

در این روشها پاسخ فرکانس مطلوب $H_d(\omega)$ در اختیار است هدف طراحی فیلتری با پاسخ فرکانس $H(\omega)$ است که معیار $\mathcal{E}(\omega)$ را حداقل کند.

$$\mathcal{E}(\omega) = W(\omega) [H(\omega) - H_d(\omega)]$$

در این رابطه $W(\omega)$ تابع مثبت ارزشگزار (وزنی) تابع فرکانس است. حداقل سازی این تابع را به روشهای مختلف ممکن است انجام داد که در ذیل اشاره می شوند..

۱-۵-۶ معیار حداقل انتگرال توانهای p

در این روش معیار بصورت

$$\mathcal{E}_p = \int_{\omega \in R} |W(\omega)(H(\omega) - H_d(\omega))|^p d\omega$$

تعریف می شود که در آن p عددی مثبت است. می توان نشان داد که اگر $p \rightarrow \infty$ کند $\mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_\infty$ میل خواهد کرد در اغلب موارد از $p=2$ استفاده می گردد که معیار بهینه سازی انتگرال مربع خطا است که به این معیار حائل انتگرال مربعات *Least Squares* می گویند البته می توان بجای گرفتن انتگرال نامحدود از خطا از جمع محدود استفاده کرد که تقریبی از معیار اصلی است

$$\mathcal{E}_p = \sum_{k=1}^K \mathcal{E}(w_k)^p$$

در طراحی فیلترهای دیجیتال *FIR* فاز پاسخ فرکانس مطلوب را صفر در نظر می گیرند. $h(n)=h(-n)$ که در نهایت $h(n)$ با طول محدود و بدون تقارن بدست می آید که با اغنال شیفت مناسب تقارن یا تقارن معکوس ضروری برای فیلترهای *FIR* خطی فاز ایجاد می شود. در طراحی فیلترهای *IIR* که اعوجاج فاز وجود دارد. فقط از دامنه استفاده می شود و فاز آن وارد محاسبات می گردد یعنی بجای $H(\omega)$ از $|H(\omega)|$ سود برده می شود.

نحوه اجرای این روش را طی مثال ساده ذیل مرور می کنیم.

هدف طراحی فیلتر *LPFIR* به روش *LS* است. برای سادگی فرض کنید فقط ۴ نقطه از طیف داده شده باشد. بدیهی است با ۴ نقطه پاسخ قابل قبولی بدشت نمی آید ولی برای آشنا شدن با نحوه کار مناسب است. تابع تبدیل *FIR* خطی فاز با درجه ای که مناسب می دانید در نظر بگیرید.

$$H(\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + a_3 e^{-j3\omega} + a_4 e^{-j4\omega}$$

برای اینکه این فیلتر خطی فاز شود، پارامترهای آن باید شرایط $a_0=a_4$ و $a_1=a_3$ را بپذیرند.

$$H(\omega) = e^{-j2\omega} (a_0 \cos 2\omega + 2a_1 \cos \omega + a_2)$$

رابطه برای نقاط داده شده از طیف نوشته می شود.

$$|H(\omega)| = [2 \cos 2\omega \quad 2 \cos \omega \quad 1] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{bmatrix} = \varphi'(\omega) \theta$$

در نتیجه

$$|H(\omega)| = 1 = [2 \quad 2 \quad 1] \theta + e(0)$$

$$|H(\pi/4)| = 1 = [0 \quad \sqrt{2} \quad 1] \theta + e(\pi/4)$$

$$|H(\pi/2)| = 1 = [-2 \quad 0 \quad 1] \theta + e(\pi/2)$$

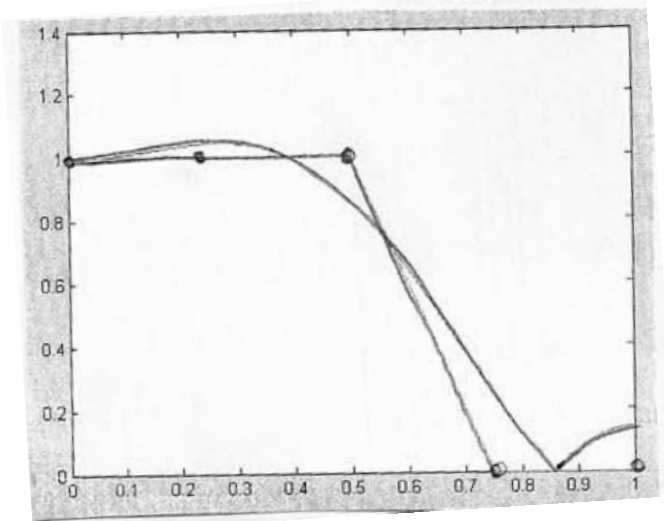
$$|H(e^{j\omega})| = 0 = [0 \quad -\sqrt{2} \quad 1] \theta + e^{(j\pi/4)}$$

$$|H(e^{j\pi})| = 0 = [2 \quad -2 \quad 1] \theta + e^{(j\pi)}$$

$$\Rightarrow (H(\omega) - \Phi^T \theta = E) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} e^{(j\pi/4)} \\ e^{(j\pi/4)} \\ e^{(j\pi/4)} \\ e^{(j\pi/2)} \\ e^{(j\pi)} \end{bmatrix}$$

پارامترهای θ باید به نحوی محاسبه گردد که مجموع مربعات خطا حداقل گردد. مقدار θ که خطا را حداقل کند برابر است با:

$$\begin{aligned} \theta &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T H(\omega) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2+\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0893 & 0 & -0.0367 \\ 0 & 0.0133 & 0.000 \\ -0.0367 & 0 & 0.1153 \end{bmatrix} = \theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1071 \\ 0.2848 \\ 0.4424 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow H(z) &= -0.1071 + 0.2848z^{-1} + 0.4424z^{-2} + 0.2848z^{-3} - 0.1071z^{-4} \end{aligned}$$



دستورات MATLAB برای طراحی

دستورات *firls* و *fircls* به این اساس نوشته شده اند که اولی از نام *FIR Least Squares* و دومی از *FIR Constrained LS* گرفته شده است. این دو برنامه فیلتر *FIR* خطی فاز طرح می کنند. دستور *yulewalk* که بر اساس الگوریتم *Yule-Walker* کار می کند با حداقل کردن خطای بین پاسخ فرکانسی با پاسخ فرکانسی مطلوب فیلتر *IIR* طرح می کند.

$$[b, a] = \text{yulewalk}(N, f, \text{mag})$$

$\text{mag} = |H(f)|$, N درجه فیلتر

مثال: استفاده از الگوریتم بهینه *Least Squares Error* در طراحی فیلتر: دستور *firls*

فیلتر *LP*, $F_p = 800\text{Hz}$, $F_s = 1000\text{Hz}$, $R_p = 0.5\text{db}$, $R_s = 40\text{db}$ در فرکانس نمونه برداری $F_t = 4\text{kHz}$ طرح کنید.

$f_{arls}(N, f_{pts}, mag, wt, 'ftype')$

N درجه فیلتر، f_{pts} بردار لبه های گذر و حذف فیلتر (فرکانس نرمال شده بین 0 تا 1)، mag دامنه فیلتر در فرکانسهای f_{pts} ، wt بردار ارزشگذار که عددی بین صفر تا 1 را به هر باند اختصاص می دهد. عدد 1 با اهمیت و اعداد دیگر درجه اهمیت کمتری در تامین مشخصات دارند.

$$R_p = -R_p\% \Rightarrow \delta_p = 1 - 10^{-R_p/20} = 0.0559$$

$$R_s = -R_s\% \Rightarrow \delta_s = 1 - 10^{-R_s/20} = 0.01$$

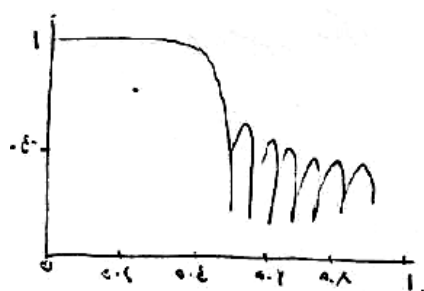
تعیین درجه فیلتر:

$[N, f_{pts}, mag, wt] = \text{remezord}(fedge, mval, dev, Ft)$

$fedge$ بردار فرکانسی لبه ها به هرتز، $mval$ دامنه در هریک از باندها، dev ریبیل در هر باند و Ft فرکانس نمونه برداری است.

$[N, f_{pts}, mag, wt] = \text{remezord}([1000 \ 1000], [1 \ 0], [0.0559 \ 0.01], 4000)$

طراحی فیلتر



$b = f_{arls}(N, f_{pts}, mag, wt)$

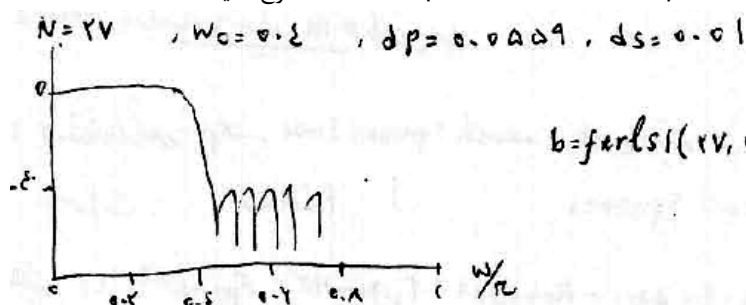
مثال: استفاده از الگوریتم *Constrained LS* در طراحی فیلتر

پائین گذر و بالا گذر

$b = f_{arls1}(N, \omega_0, R_p, R_s, \omega_p, \omega_s, k, 'high')$

N درجه فیلتر، ω_0 فرکانس نرمال شده قطع $3db$ با لحاظ کردن $Ft=2Hz$ و R_p و R_s ریبیل باندهای گذر و حذف به db ، $'high'$ برای فیلتر *HP*

فیلتر *LP* با درجه $N=27$ و فرکانسهای نرمال شده $\omega_s=0.5\pi$ ، $\omega_p=0.45\pi$ ، $\delta_p=0.051$ ، $\delta_s=0.01$ طرح کنید

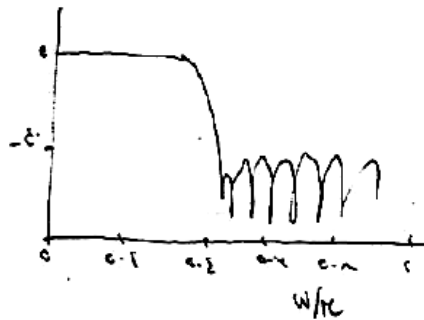


$b = f_{arls1}(27, 0.45, 0.0559, 0.01)$

فیلتر میان گذر

$b = f_{irls}(N, f, amp, up, lo, 'designflag')$

N درجه فیلتر، f بردار فرکانس های لبه حذف و گذر (نرمال شده برای $Ft=2Hz$)، amp بردار دامنه در فرکانسهای مزبور، lo ، up انحراف مجاز در دامنه فیلتر (ریبیل ها)، $'designflag'$ اجازه کنترل فرآیند طراحی را می دهد.



$$N=40, f=[0 \ 0.3 \ 0.5 \ 1]$$

$$amp=[0 \ 1 \ 0], up=[0.02 \ 1.02, 0.02]$$

$$Lo=[-0.02 \ 0.98 \ -0.02]$$

$$b=firfs(n,f,amp,up,lo)$$

۲-۵-۶ معیار (Min-Max) یا چبی شف

معیار (Min-Max) یا چبی شف: در این معیار هدف حداقل نمودن ماکزیمم قدر مطلق خطا است.

$$\epsilon_m = \max_{\omega \in R} |\epsilon(\omega)|$$

در طراحی بهینه فیلترهای دیجیتال الگوریتم *Parks-McClellan* بر این اساس تبیین شده است که ماکزیمم قدر مطلق خطا $|\epsilon(\omega)|$ را حداقل می کند. به فیلتری که اینگونه طراحی می شود *equiripple Linear Phase FIR* می گویند چرا که ریبیل بین باند گذر و حذف به طور مساوی تقسیم می گردد.

دستور MATLAB برای اجرای این الگوریتم:

دستور *remez* از دستورات MATLAB برای طراحی فیلترهای *FIR* خطی فاز براساس الگوریتم *Parks-McClellan* نوشته شده است

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{باند گذر} \\ 0 & \text{باند حذف} \end{cases}$$

تعریف می شود و تابع

معمولا فیلتر مطلوب بصورت فیلتر ایده آل تعریف می گردد. مثلا فیلتر *LP* با مشخصات

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_s/\delta_p & \text{باند حذف} \\ 1 & \text{باند گذر} \end{cases} \quad \text{یا} \quad W(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{باند حذف} \\ \delta_p/\delta_s & \text{باند گذر} \end{cases}$$

معرفی می گردد.

وزنی بصورت

روش بهینه رمز در MATLAB

برای طراحی فیلتر *LPFIR* به روش بهینه رمز دستور ذیل اجرا می شود.

$$b=\text{remez}(N,fpts,mag,wt,'fity')$$

b: خروجی با طول $N+1$ که ضرایب فیلتر *FIR* هستند.

fpts: فرکانس نمونه برداری ۲ در نظر گرفته می شود و این بردار فرکانس لبه ها را بین 0 تا ۱ را معرفی می کند. اولین المان باید صفر و آخرین ۱ باشد. باند انتقالی حداقل باید 0-1 باشد.

mag: دامنه فیلتر در فرکانس های بردار *fpts*

'fity': با انتخاب *hilbert* و *differentiator* دو تبدیل دیگر را نیز انجام می دهد.

مثال: فیلتر *LPFIR* پائین گذر با $F_s=1000\text{Hz}$, $F_p=800\text{Hz}$, $R_s=40\text{db}$, $R_p=0.5\text{db}$ و $F_t=4000\text{Hz}$ طرح کنید.

• انجام محاسبات مقدماتی

$$R_s=40\text{db} \Rightarrow \delta_s = 10^{\frac{-40}{20}} = 0.01$$

$$R_p=0.5 \Rightarrow \delta_p = 1 - 10^{\frac{-0.5}{20}} = 0.05559$$

$$fedge=[1000 \ 1000]$$

فرکانس های لبه

$$mval = [1 \quad 0]$$

$$dev = [0.0554 \quad 0.01]$$

$$FT = 4000$$

دامنه نمراتهای کشف
انحراف در دامنه
فرکانس نمونه برداری

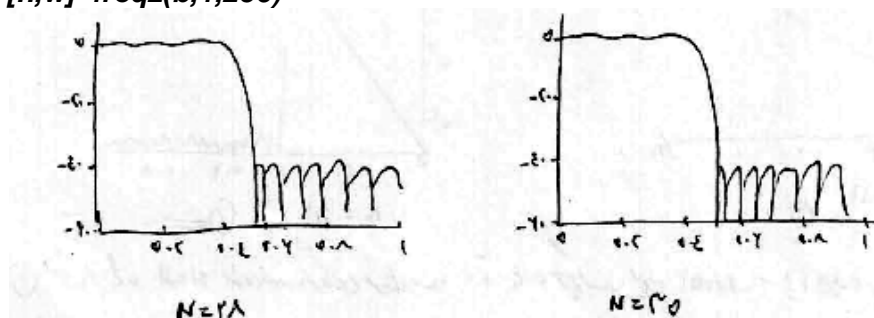
- تعیین درجه فیلتر

$$[N, fpts, mag, wt] = \text{remezord}(fedge, mval, dev, ft)$$

- تعیین فیلتر

$$b = \text{remez}(N, fpts, mag, wt);$$

$$[h, w] = \text{freqz}(b, 1, 256)$$

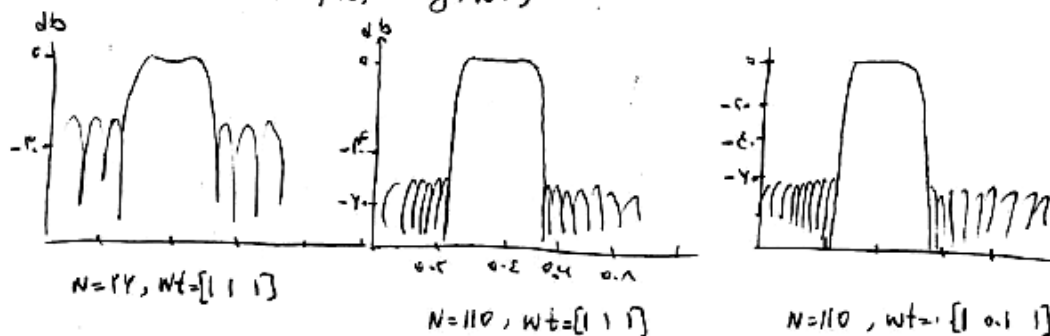


مثال: فیلتر میان گذر با $N=26$ ، بردار فرکانسی نرمال شده $fpts$ با دامنه mag و تابع ارزشگذار wt طرح کنید.

$$N=26, fpts = [0 \quad 0.25 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.55 \quad 1], mag = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$wt = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$b = \text{remez}(N, fpts, mag, wt)$$



مثال: ساخت مشتق گیر FIR با دستور remez

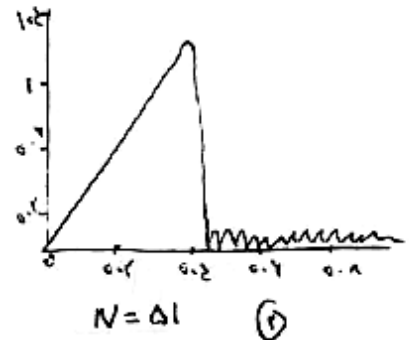
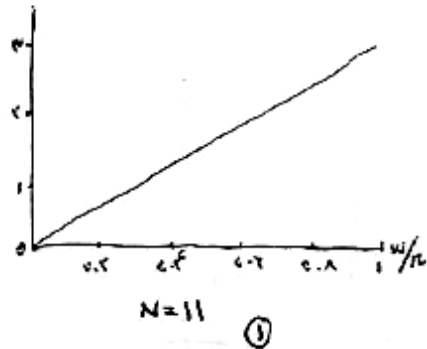
پاسخ فرکانسی مشتق گیر $H(\omega) = j\omega$ $0 \leq \omega < \pi$ است و تابع ضربه گسسته واحد آن

$$p_{dy}(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{(-1)^n}{n} & n>0 \end{cases}$$

بدست می آید. هدف ساختن مشتق گیر FIR است. در عمل از آنجا که سیگنال ورودی پهنای باند محدود $0 \leq \omega \leq \pi$ دارد مشتق گیر را نیز برای همین محدوده می توان طرح کرد. از دستورات $MATLAB$ نمی توان برای محاسبه درجه فیلتر استفاده کرد ولی می توان با داشتن N آنرا ساخت.

(a) پارامترهای اولیه $N=11$ درجه فیلتر، $fpts=[0 \quad 1]$ فرکانس های نرمال شده اولیه و نهائی و $mag=[0 \quad \pi]$ مقدار دامنه در فرکانسهای $fpts$ است.

(شکل ۱) $b = \text{remez}(N, fpts, mag, 'differentiator')$



(b) مشتق گیر را با $N=51$ برای محدوده فرکانسی نرمال شده 0 تا 0.4π طرح کنید.

پس $N=51$, $fpts = [0 \ 0.4 \ 0.451]$ و $mag = [0 \ 0.4\pi \ 0 \ 0]$ است

مثال: فیلتر FIR تبدیل هیلبرت Hilbert طرح کنید.

پاسخ فرکانسی تبدیل هیلبرت که به آن شیفت دهنده 90° درجه فاز نیز می گویند که برابر است با:

$$H_{HT}(e^{j\omega}) = \begin{cases} j & -\pi < \omega < 0 \\ -j & 0 < \omega < \pi \end{cases}$$

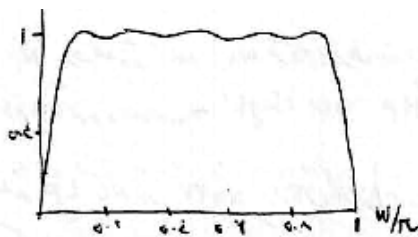
پاسخ گسسته ضربه واحد آن

$$h_{HT}(n) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

درجه فیلتر را از رابطه

$$N \approx \frac{2.1832 \log_{10} \delta_p}{\omega_L}$$

می توان بدست آورد که در آن δ_p ریپل باند گذر $R_p = 20 \log(1 - \delta_p)$ یا $\delta_p = 1 - 10^{-R_p/20}$ عرض باند انتقالی نرمال شده است. $N=20$ و باند گذر را 0.1π تا 0.9π در نظر بگیرید. در نتیجه $N=20$ و $fpts = [0.1 \ 0.9]$ و $mag = [1 \ 1]$ می گردد.



$$b = \text{remez}(N, [0.1 \ 0.9], [1 \ 1], 'Hilbert')$$

توجه: تبدیل هیلبرت ایده آل فیلتری تمام گذر است ولی تقریب آن میانگذر است. بنابراین این فیلتر برای فرکانس های $\omega > 0.1\pi$ کار می کند. و برای $0 < \omega < 0.1\pi$ عملکرد فیلتر صحیح نیست. ضمناً الگوریتم **remez** باند انتقالی کمتر از 0.1π را نمی پذیرد.

مثال: مثال ۶۱ را بر اساس روشهای بهینه حل کنید.

الف: رمز **remez**:

برای طراحی فیلتر مورد بحث به روش رمز ابتدا باید درجه فیلتر را تعیین کرد.

$$1) [N, FO, MO, WT] = \text{remezord}([w_{s1} \ w_{p1} \ w_{p2} \ w_{s2}]/\pi, [0 \ 1 \ 0], [\delta_s \ \delta_p \ \delta_s])$$

$$w_{s1} = \frac{\pi}{8}, \ w_{p1} = \frac{\pi}{8}, \ w_{p2} = \frac{2\pi}{8}, \ w_{s2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\delta_s = 0.00314, \ \delta_p = 0.108$$

بعد از اجرای دستورات این نتایج بدست می آید.

$$N=44$$

$$f_0 = [0 \quad 1/4 \quad 1/2 \quad 3/4 \quad 1]$$

$$m_0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$w_1 = [34, 124 \quad 1 \quad 34, 124]$$

$$b = \text{remez}(N, f_0, m_0, w_1, \text{freqz}(b, 1))$$

فیلتری که بدست می آید دارای $R_s=48\text{db}$ و $R_p=1.5\text{db}$ است. اگر درجه فیلتر به ۴۰ افزایش دهیم ($M=41$) مشخصات فیلتر $R_p<1$, $R_s>50$ دقیقاً مشخصات مسئله تامین می شود ولی این بار با فیلتری خطی فاز و با طول ۴۱ که نسبت به طرحهای قبلی فیلتر بسیار کوچکتر بحساب می آید. از این رو این فیلتر انتخاب بسیار مناسبی بحساب می آید. دلیل کاهش طول فیلتر از آنروست که در این روش پریل بین باند گذر و باند حذف تقسیم گردیده است. این امر موجب شده است که درجه کوچکتری برای فیلتر بدست می آید. در فیلترهای قبلی $R_s=50$ مثلاً# در نظر گرفته می شد. آزمون ریاضی 0.0275 بدست می آمد. ولی در اینجا امکان انتخاب مستقل برای مقدار R_p وجود دارد.

اگر با فیلتر رمز می خواستیم دقیقاً مشخصات فیلترهای قبل ($R_p=0.0275$, $R_s=50$) را بدست آوریم $N=62$ بدست می آمد که همچنان کاهش قابل ملاحظه در درجه فیلتر را بدنبال دارد

ب: روش LS

نحوه اجرای دستور این روش مشابه روش رمز است.

$$b = \text{firls}(N, f_0, m_0, w_1, \text{freqz}(b, 1))$$

مسئله اینجااست که این فیلتر نمی تواند با درجه ای که remezord محاسبه می کنند مشخصات فیلتر را تامین کند. این فیلتر توانست با $R_p<1\text{db}$ و $R_s>50\text{db}$ برسد.

ج: روش CLS

در این روش محدوده پریلها به الگوریتم سیستم داده شده و در فرآیند بهینه سازی اعمال محدودیت می کنند. به نحویکه فیلتر بدست آمده بتواند حدود پریلها را تامین کند. نحوه اجرای دستور این فیلتر از این قرار است.

$$b = \text{firlcls}(N, [0 \quad \frac{w_{c1}}{N} \quad \frac{w_{cr}}{N} \quad 1], [0 \quad 1 \quad 0], [\delta_s \quad 1+\delta_p \quad \delta_s], [-\delta_s, 1-\delta_p, \delta_s])$$

$$\frac{w_{c1}}{N} = \frac{1}{14}, \quad \frac{w_{cr}}{N} = \frac{17}{14}$$

$$w_p = [\delta_s, 1+\delta_p, \delta_s] = [0.00314, 1.108, 0.00314]$$

$$w_s = [-\delta_s, 1-\delta_p, -\delta_s] = [-0.00314, 1-0.108, -0.00314]$$

این فیلتر نیز برای تامین مشخصات مسئله نیازمند $M=62$ ($N=61$) است.

محل شده و ذخیره کن

- ① فیلتر سگتیر با فرکانس برزری $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ رنجایی باشد $\frac{\pi}{16}$ طرح کنید که بهره فرکانس مرکزی آن برابر ۱۰۰ دربر داشته باشد و در آن صورت

$$\left[0.1347 \frac{(1-z^{-2})}{1+0.8854z^{-2}} \right]$$

- ② فیلتر ناچ برای سیگنال ECG طرح کنید که فرکانس تراش ۵۰ هرتز باشد و فرکانس مرکزی ۵۰۰ هرتز داشته باشد و ۲۵۰ هرتز برای برابر کرده

$$\left[0.924 \frac{1-1.142z^{-1}+z^{-2}}{1-1.842z^{-1}+0.93z^{-2}} \right]$$

- ③ ضرایب فیلتر $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \dots$ را بنویسید $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ مضاف کند و بهره dc آن ۱ باشد. آن را می توانید ارتباطی بین طول فیلتر و L در $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ برقرار کنید.

$$\left[b_0 = b_1 = b_2 = \frac{1}{3} \quad L = \text{طول فیلتر} \right]$$

- ④ اسیدرکتی طرح کنید $b_0(n\omega_0 + \varphi)$ با فاز φ و $b_0(n\omega_0 + \varphi)$ را بنویسید.

$$\left[y(n) - 2b_0(n\omega_0 + \varphi) y(n-1) + y(n-2) = 0, y(-1) = b_0(-\omega_0 + \varphi), y(-2) = b_0(-2\omega_0 + \varphi) \right]$$

- ⑤ سیگنال صدای باجهای با بهره ۱۰۰ اسیدرکتی فرکانس مرکزی ۲۰۰ هرتز داشته باشد به فرکانسهای ۱۰۰۰، ۱۸۸۹، ۷۷۸۸، ۱۰۰۰۰

و ۲۱۲۷۷ هرتز با ضرایب فیلتر FIR بهره ۱۰۰ برابر طرح کنید که این فرکانسها را حذف کند و باند بزرگی از نظر صاف فرکانسهای دیگر داشته باشد. (ب) ضرایب فرکانسهای دیگر حذف شوند

$$\left[\frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1}+z^{-2})(1-0.718z^{-1}+z^{-2})(1-0.35z^{-1}+z^{-2})}{4.352} \right] \quad (a) \quad \frac{1}{18} \times \frac{1-z^{-18}}{1-z^{-1}}$$

- ⑥ ریسپل پرکردن ۱۰۰ و ۱۰۵ هرتز به هم را با فرکانسهای آهسته ساختند است فیلتر طرح کنید که فرکانسهای ۱۰۰ و ۱۰۵ هرتز را حذف کند و صاف فرکانسهای بزرگتری داشته باشد و فیلتر صدای بزرگتری باشد.

$$\left[f_s = 11 \times 10^3, f_c = 2400, p = 825 \quad \text{فیلتر صدای بزرگتری با بهره ۱۰۰ و ۱۰۵ هرتز را حذف کند} \quad \omega_c = 2400, p = 825 \quad \left[H(z) = \frac{1}{21} \times \frac{1-z^{-21}}{1-z^{-1}} \right] \right]$$

- ⑦ فیلتر صدای بزرگتری را بنویسید که فرکانسهای حذف ۱۰۰ و ۱۰۵ هرتز را داشته باشد و بهره ۱۰۰ داشته باشد.

$R_p = 0.56, R_s = 0.56$ در نظر بگیرید. ضرایب فیلتر L را بر مبنای L بنویسید.

$$\left[R_s = 0.56, R_p = 0.56, \omega_s = 1, \omega_p = 0.99 \right]$$

② چاربهش تبدیل آنرا به یک فیلتر بسطی طرح می شود.

[مزیت: خطای دلتا ناآزاد از نویز دارد]

③ بصورت زیر فیلتر با این تمرین با نمونه های طرح کنید که $w_p = \frac{\pi}{15}$, $w_s = \frac{\pi}{10}$, $R_p = 1 \text{ dB}$, $R_s = 50 \text{ dB}$ باشد طول موج باشد

$$\left[h_{LP}(n) = \frac{h \left[\left(n - \frac{399}{4} \right) \frac{11\pi}{15} \right]}{\pi \left(n - \frac{399}{4} \right)} * W(n) \quad W = \text{hamming}(\varepsilon_{50}) \right]$$

④ مستند h با نمونه های طرح کنید

$$\left[h_{LP}(n) = \frac{h \left[\left(n - \frac{351}{4} \right) \frac{11\pi}{15} \right]}{\pi \left(n - \frac{351}{4} \right)} * W(n) \quad W = \text{Kaiser}(2.52, \varepsilon, 5.5) \right]$$

⑤ فیلتر میانگین تمرین با نمونه های طرح کنید که $w_p = w_s = \frac{\pi}{15}$, $R_p = 50 \text{ dB}$ باشد

$$\left[h_{BP}(n) = \frac{h \left[\left(n - \frac{351}{4} \right) \left(w_p + \frac{11\pi}{15} \right) \right] - h \left[\left(n - \frac{351}{4} \right) \left(w_s - \frac{11\pi}{15} \right) \right]}{\pi \left(n - \frac{351}{4} \right)} * W(n) \right]$$

$W = \text{Kaiser}(2.52, \varepsilon, 5.5)$

⑥ نامتبدیل اگر $h_{LP}(n)$ با یک ضرب فیلتر با این تمرین با نمونه های طرح w_c باشد $h_p(n) = (-1)^n h_{LP}(n)$ باشد

فیلتر با این تمرین با نمونه های طرح w_c است